Álgebra



Intelectum
EVOLUCIÓN

Intelectum
Álgebra
IX

Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica las propiedades sobre teoría de exponentes en la potenciación y la radicación.
- Aplica los teoremas de teoría de exponentes en la potenciación y radicación.
- Identifica los elementos del término algebraico y discrimina polinomios considerando su naturaleza, la cantidad de términos e identifica términos semejantes.
- Determina el grado absoluto y relativo en monomios y polinomios, además calcula su valor numérico.
- Identifica los principales productos notables.
- Reduce expresiones algebraicas identificando el producto notable a utilizar.
- Identifica los tres casos que se presentan en los cocientes notables.
- Realiza el desarrollo de un cociente notable y analiza su estructura.

Unidad 2

- Comprende los distintos métodos de factorización.
- Aplica el algoritmo de aspa simple, doble y doble especial en la factorización de polinomios.
- Evalúa el procedimiento al determinar el MCM y el MCD en expresiones algebraicas.
- Reconoce las fracciones propias, impropias, homogéneas, heterogéneas, equivalentes, compuestas e irreductibles.
- Analiza las propiedades de los números combinatorios y define el binomio de Newton.
- Construye el factor racionalizante analizando las expresiones algebraicas.
- Calcula el factorial de un número, aplicándolo en el cálculo combinatorio.
- Analiza la representación gráfica del número complejo.
- Utiliza la definición de complejos especiales para la resolución de problemas.

ECUACIONES TRASCENDENTES

Investigadores de los EE UU lograron detectar la presencia de elementos radiactivos en la carne de atún que luego del accidente nuclear de Fukushima migraron a la costa de San Diego en California.

Los niveles encontrados no son perjudiciales para la salud humana, pero es dable que por recomendaciones de los expertos se deben estudiar más las especies radiactivas.

Con las ecuaciones trascendentes se puede calcular la masa de un elemento radiactivo luego de un cierto tiempo "t". Gracias a estas ecuaciones, podemos tener una aproximación de la durabilidad de los elementos en la naturaleza.

$$\frac{m_t}{m_o} = e^{wt}$$

Contenido:

Unidad 1

- Teoría de exponentes.
- Polinomios.
- Productos notables.
- Cocientes notables.

Unidad 2

- Factorización.
- MCD y MCM - Fracciones algebraicas.
- Potenciación.
- Radicación - Racionalización.
- Números complejos.

Unidad 3

- Ecuaciones de primer grado Planteo de ecuaciones.
- Matrices y determinantes.
- Sistema de ecuaciones.
- Ecuaciones de segundo grado Planteo de ecuaciones.

Unidad 4

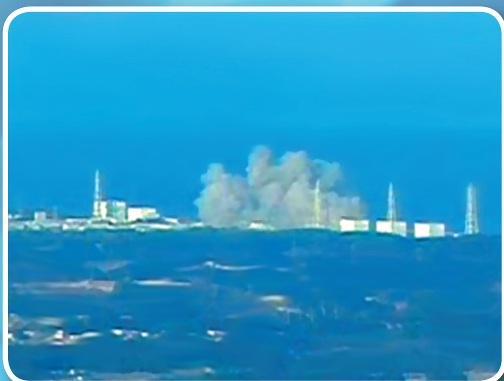
- Inecuaciones.
- Funciones.
- Límites.
- Derivadas.
- Sucesiones - Progresiones.

Unidad 3

- Clasifica las ecuaciones según sus coeficientes y la naturaleza de sus soluciones.
- Determina el valor de la variable dentro de la ecuación e interpreta la solución o raíces.
- Realiza operaciones básicas entre matrices identificando filas y columnas y aplicando los teoremas dados.
- Aplica los teoremas para realizar las operaciones entre matrices.
- Aplica el criterio de los determinantes para el desarrollo de un sistema de ecuaciones.
- Aplica la regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Analiza los distintos teoremas empleados para la resolución de una ecuación de grado superior.
- Utiliza operaciones de adición y multiplicación de raíces al resolver una ecuación de segundo grado.

Unidad 4

- Analiza el procedimiento de resolución de una inecuación.
- Plantea matemáticamente enunciados utilizando inecuaciones.
- Aplica la definición de las ecuaciones e inecuaciones y los representa matemáticamente.
- Identifica el dominio y rango en una función, y analiza su gráfica.
- Representa gráficamente las distintas funciones estudiadas.
- Comprende la definición formal del límite.
- Determina el límite de una función y demuestra la unicidad.
- Analiza las distintas notaciones sobre derivadas, además interpreta los teoremas estudiados.
- Emplea la definición de derivada para determinar los valores máximos y mínimos de una función.
- Identifica los elementos de una progresión y analiza las relaciones dadas.
- Aplica los criterios de razón en la resolución de sucesiones y las fórmulas respecto a series.

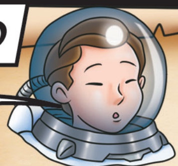
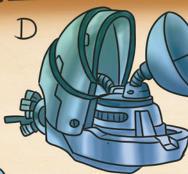
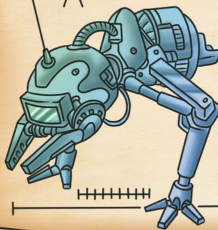
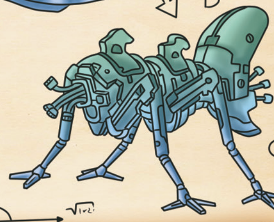





RESCATE INTERPLANETARIO

LA ASTRONAVE DE LOS COSMONAUTAS CHRISTIAN Y ALDO HA CAÍDO EN LO PROFUNDO DE UN CAÑÓN MIENTRAS EXPLORABAN LA SUPERFICIE DE UNO DE LOS PLANETAS DEL SISTEMA ALFA-CENTAURI.

¡QUÉ MALA SUERTE; DADO LO PROFUNDO DE ESTE CAÑÓN NO PODEMOS MANDAR NINGUNA SEÑAL DE AUXILIO; TARDARÁN MUCHO EN RESCATARNOS, TEMO LO PEOR !

¡NO TE PREOCUPES AMIGO MÍO, ESTOY CONSTRUYENDO UN ROBOT CUYO DISEÑO ESTÁ BASADO EN EL DE UNA HORMIGA, ESTE LLEVARÁ UNA ANTENA EN LA CIMA DEL DESFILADERO PARA MANDAR NUESTRA SEÑAL DE AUXILIO !

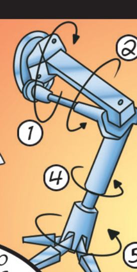
1

CHRISTIAN Y ALDO SE ENCUENTRAN ENSAMBLANDO AL PEQUEÑO AUTÓMATA; REPENTINAMENTE ALDO DESCUBRE QUE TIENEN UN PROBLEMA.

¡RAYOS ! NO RECUERDO LA MANERA DE CALCULAR LOS GRADOS DE LIBERTAD PARA CADA UNO DE LAS PATAS DE NUESTRO ROBOT.

¡NO TE PREOCUPES ! USAREMOS EL ÁLGEBRA LINEAL PARA ESTE CASO; VEAMOS...

2

¡ES CIERTO LO HAS SOLUCIONADO !, INGRESARÉ LOS DATOS A LA COMPUTADORA.

POR LO QUE VEO CADA PATA POSEE TRES MOVIMIENTOS DE TRASLACIÓN Y DOS MOVIMIENTOS DE ROTACIÓN ESO NOS DA UN TOTAL DE 5 GRADOS DE LIBERTAD POR CADA PATA, LUEGO USAMOS LA SIGUIENTE ECUACIÓN MATRICIAL.

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB\cos\theta \\ BC\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



3

CHRISTIAN Y ALDO OBSERVAN CÓMO SU ARTILUGIO MECÁNICO SUBE POR LAS ESCARPADAS PAREDES DEL PROFUNDO DESFILADERO EN EL QUE SE ENCUENTRAN.

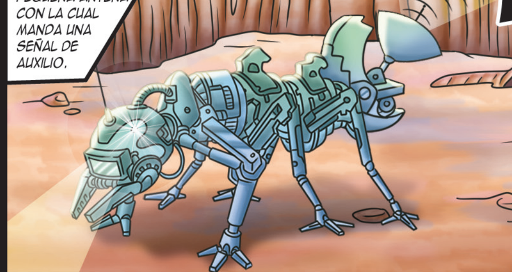
¡ AY, ESPERO QUE NO SE CAIGA !

¡NO SEAS AVE DE MAL AGÜERO, SÉ POSITIVO !

4

FINALMENTE EL INSECTO MECÁNICO LLEGA A LA PARTE SUPERIOR DEL CAÑÓN Y DESPLIEGA DESDE SU PARTE TRASERA UNA PEQUEÑA ANTENA CON LA CUAL MANDA UNA SEÑAL DE AUXILIO.

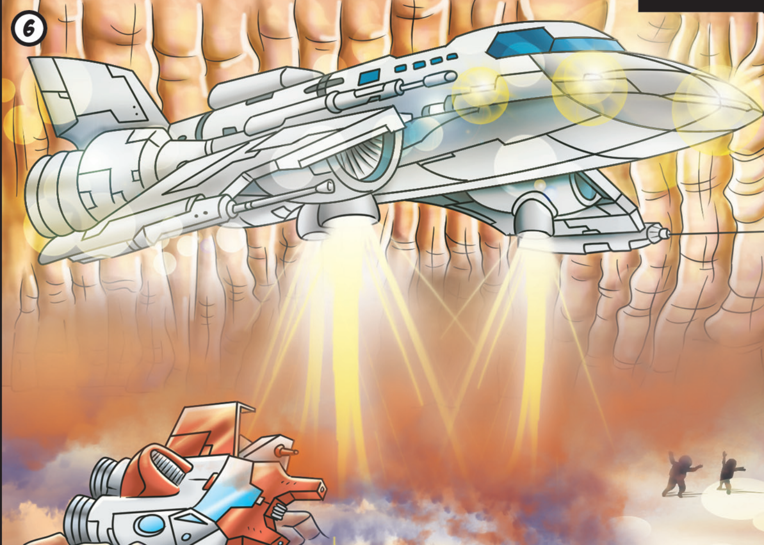
¡SOS!

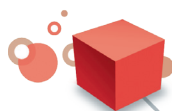


5

6

UNA NAVE DE RESCATE SOBREVUELA POR ENCIMA DE CHRISTIAN Y ALDO QUIENES GRITAN DE FELICIDAD, PUES PRONTO VOLVERÁN A CASA.





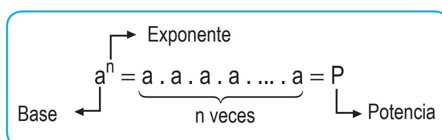
UNIDAD 1

TEORÍA DE EXPONENTES

POTENCIACIÓN

Es una operación matemática en la que dada una base real **a** elevada a un exponente entero **n**, hallaremos una expresión llamada potencia **P**.

Su representación matemática es:



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = P$$

Propiedades

1. Multiplicación de potencias con bases iguales
Para $a \in \mathbb{R} \wedge m; n \in \mathbb{Z}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. División de potencias con bases iguales
Para $a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge m; n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Potencia de una potencia
Para $a \in \mathbb{R} \wedge m; n \in \mathbb{Z}$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

4. Potencia de una multiplicación
Para $a; b \in \mathbb{R} \wedge m; n \in \mathbb{Z}$

$$(ab)^n = a^n.b^n$$

5. Potencia de una división
Para $a; b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

6. Exponente cero

$$a^0 = 1; \quad \forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

7. Exponente negativo

$$a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

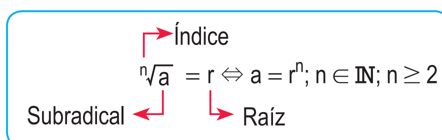
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; \quad a \neq 0,\ b \neq 0$$

RADICACIÓN

La radicación consiste en encontrar un número llamado raíz, de manera que al elevarlo al índice del radical obtengamos la cantidad subradical.

Su representación matemática es:



$$\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow a = r^n;\ n \in \mathbb{N};\ n \geq 2$$

Nota

Debes saber que la **teoría de exponentes** nos **facilitará comprender** y **entender** la química, aritmética, trigonometría, geometría, geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, etc.

Recuerda

- Suma de los "n" primeros números naturales

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Suma de los "n" primeros números pares:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = n(n+1)$$

- Suma de los "n" primeros números impares:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$



Recuerda

Potenciación	Radicación
$(+a)^{2n} = +a^{2n}$	$\sqrt[2n]{+a^{2n}} = \lvert a \rvert$
$(+a)^{2n-1} = +a^{2n-1}$	$\sqrt[2n-1]{+a^{2n-1}} = +a$
$(-a)^{2n} = a^{2n}$	$\sqrt[2n-1]{-a^{2n-1}} = -a$
$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$	$\sqrt[2n]{-a^{2n}} = ai$ (cantidad imaginaria)

Nota

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{"xy" veces}} = x^{xy}$$

No olvidar:

$$5^{4^{2^3}} \neq \left((5^4)^2\right)^3$$

Nota

Representación:

- 2n : Número par
- 2n – 1 : Número impar
- |a| : valor absoluto de a



Recuerda

Sea: $a > 0$

- $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a...}}} = a$
- $\sqrt{a(a+1) \pm \sqrt{a(a+1) \pm ...}} = a + 1\ (+)$
  $a\ (-)$

Ejemplos:

- $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7...}}} = 7$
- $\sqrt{\underbrace{20}_{4 \times \mathbf{5}} + \sqrt{20 + \sqrt{20 + ...}}} = 5$
- $\sqrt{\underbrace{20}_{4 \times \mathbf{5}} - \sqrt{20 - \sqrt{20...}}} = 4$

Atención

Considera también:

- $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$; $a > 0$

Ejemplo:

$7^2.\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(7^2)^3.5} = \sqrt[3]{7^6.5}$

- $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{a^{nk}}$; $k \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo:

$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3.10]{5^{2.10}} = \sqrt[30]{5^{20}}$



Nota

Casos de exponentes iguales:

- Si: $5^x = 3^x \Rightarrow x = 0$
- Si: $x^x = (1/a)^{(1/a)} \Rightarrow x = 1/a$

Propiedades

1. Radicales sucesivos

Para m; n y p $\in \mathbb{N}$; además; $a \geq 0$; $b \geq 0$ y $c \geq 0$

$$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[mn]{b}.\sqrt[mnp]{c}$$

2. Raíz de raíz

Para $m \wedge n \in \mathbb{N}$; $a \geq 0$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

3. Índices iguales

Para $n \in \mathbb{N}$; $a \geq 0 \wedge b \geq 0$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Para $n \in \mathbb{N}$; $a \geq 0 \wedge b > 0$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

4. Exponente fraccionario

Para m; $n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$$

5. Propiedades adicionales

$$\sqrt[m]{x^a.\sqrt[n]{x^b.\sqrt[p]{x^c}}} = x^{\frac{(an+b)p+c}{mnp}}$$

$$\sqrt[m]{x^a:\sqrt[n]{x^b:\sqrt[p]{x^c}}} = x^{\frac{(an-b)p-c}{mnp}}$$

6. Representación infinita

$$\sqrt[n]{x.\sqrt[n]{x.\sqrt[n]{x\ ...}}} = \sqrt[n-1]{x}$$

$$\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x\ ...}}} = \sqrt[n+1]{x}$$

7. Representación finita

$$\underbrace{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{...\sqrt[n]{x}}}}}_{m\ \text{radicales}} = \left[\sqrt[n^m]{x}\right]^{\frac{n^m-1}{n-1}}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div ... \div \sqrt[n]{x}}}}}_{m\ \text{radicales}} = \begin{cases} \left[\sqrt[n^m]{x}\right]^{\frac{n^m+1}{n+1}} & ;\text{si m: impar} \\ \left[\sqrt[n^m]{x}\right]^{\frac{n^m-1}{n+1}} & ;\text{si n: par} \end{cases}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas ecuaciones cuya característica es tener la incógnita en el exponente de una potenciación. Para su resolución se utilizará la teoría de exponentes anteriormente estudiada.

Propiedades

Bases iguales

Si: $b^x = b^y \Rightarrow x = y$; $b \neq 0 \wedge b \neq \pm 1$

Exponentes iguales

Si: $x^n = a^n \Rightarrow x = a$ $\quad \forall\, n \neq 0 \wedge x; a \in \mathbb{R}^+$

Si: $a \neq b \wedge$ $a^x = b^x \Rightarrow x = 0$ $\quad \forall a; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Analogías semejanza

Si: $x^x = a^a \Rightarrow x = a$ $\quad \forall\, x; a \neq 0$

Si: $\sqrt[x]{x} = \sqrt[n]{n} \Rightarrow x = n$ $\quad \forall\, x; n \neq 0 \wedge \{x; n\} \subset \mathbb{N}$

Ejemplos:

1. Si:

$$x^x = 3^{3^{-\frac{2}{3}}},$$

halla el valor de x:

Resolución:

$$x^x = 3^{3^{-\frac{2}{3}}} = 3^{3^{\frac{1}{3}-1}} = 3^{3^{-1}.3^{\frac{1}{3}}} = x^x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\left(3^{\frac{1}{3}}\right)}$$

$\therefore x = \sqrt[3]{3}$

2. Halla el valor de $\frac{x}{y}$:

si: $x^2 = \frac{a^{2x} + a^{3x}}{1 + a^x} \quad \wedge \quad y^3 = \frac{a^{4y} - a^{3y}}{a^y - 1}$

Resolución:

$x^2 = \frac{a^{2x} + a^{3x}}{1 + a^x}$ $\qquad$ $y^3 = \frac{a^{4y} - a^{3y}}{a^y - 1}$

$x^2 = \frac{a^{2x}(1 + a^x)}{1 + a^x}$ $\qquad$ $y^3 = \frac{a^{3y}(a^y - 1)}{a^y - 1}$

$x^2 = (a^x)^2 \Rightarrow x = a^x$ $\qquad$ $y^3 = (a^y)^3 \Rightarrow y = a^y$

$\therefore \sqrt[x]{x} = a$ $\qquad$ $\therefore \sqrt[y]{y} = a$

Como: $\sqrt[x]{x} = \sqrt[y]{y} = a$

Luego: $x = y \Rightarrow \frac{x}{y} = 1$

Pero: $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \vee \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

Problemas resueltos

1 Si: $\dfrac{x^{x^x}}{x} = 3^{1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$,

calcula: $S = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

Resolución:

Del dato tenemos:

$x^{x^x - 1} = 3^{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}$

$x^{x^x - 1} = 3^{-\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)}$

$x^{x^x - 1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}-1}$

Se observa que: $x = \dfrac{1}{3}$

Luego piden:

$S = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

$S = 1 + x(\underbrace{1 + x + x^2 + ...}_{S})$

$S = 1 + xS \Rightarrow S(1 - x) = 1$

$\Rightarrow S = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

$\therefore S = \dfrac{3}{2}$

2 Si: $A = \sqrt{2}^{\sqrt[3]{8}^{\sqrt[3]{9}^{\sqrt[3]{3}}}}$

calcula: $P = \dfrac{\sqrt[5]{512}}{\sqrt[5]{A}}$

Resolución:

Del dato:

$A = \sqrt{2}^{\left(\sqrt[3]{8}^{\sqrt[3]{9}}\right)^{\sqrt[3]{3}}}$

$A = \sqrt{2}^{\left(\sqrt[3]{8}^{\sqrt[3]{9.3}}\right)}$

$A = \sqrt{2}^{\left(\sqrt[3]{8}^{\sqrt[3]{27}}\right)}$

$A = \sqrt{2}^{\left(\sqrt[3]{8}\right)^3}$

$A = \sqrt{2}^{8} = 2^4$

Luego piden:

$P = \dfrac{\sqrt[5]{512}}{\sqrt[5]{A}} = \dfrac{\sqrt[5]{2^9}}{\sqrt[5]{2^4}}$

$P = \sqrt[5]{2^{9-4}} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

3 Calcula el valor aproximado de: $\sqrt[3]{25 + \left(\sqrt{5\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{4...}}}}\right)^3}$

Resolución:

De la expresión sea:

$E = \sqrt{5\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{4...}}}}$

$E = \sqrt{5\sqrt{4\underbrace{\sqrt{5\sqrt{4...}}}_{E}}}$

$E = \sqrt{5\sqrt{4E}} \Rightarrow E^2 = 5\sqrt{4E}$

$E^4 = 5^2 . 4E \Rightarrow E^3 = 100$

Nos piden:

$\sqrt[3]{25 + \left(\sqrt{5\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{4...}}}}\right)^3}$

$= \sqrt[3]{25 + E^3}$

$= \sqrt[3]{25 + 100} = \sqrt[3]{125} = 5$

4 Determina el valor de x:

$$e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$$

Resolución:

Multiplicamos ambos miembros por e^{3x}:

$e^{3x}(e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x}) = 0(e^{3x})$

$e^{4x} - 5e^{2x} + 4 = 0 \Rightarrow (e^{2x})^2 - 5(e^{2x}) + 4 = 0$

Reemplazamos $e^{2x} = t$:

$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t - 1) = 0$

Reponemos: $(e^{2x} - 4)(e^{2x} - 1) = 0$

Cada factor igualamos a cero:

$e^{2x} - 4 = 0$

$e^{2x} = 4 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 4$

$2x = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln 4 = 0{,}693$

$e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} = 1 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 1$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

5 Si una población de bacterias comenzó con 700 y se sextuplica cada 4 horas. La cantidad de ejemplares (Z) luego de t horas es:

$$Z = 700 . 6^{t/4}$$

Determina en qué tiempo habrá 151 200 ejemplares.

Resolución:

Por dato: $Z = 151\,200$ y $Z = 700 . 6^{t/4} \Rightarrow 151\,200 = 700.6^{t/4}$

Dividimos ambos miembros por 700:

$6^3 = 6^{t/4}$

Por exponentes iguales:

$3 = \dfrac{t}{4} \Rightarrow t = 12$ horas

6 Reduce:

$$\frac{\sqrt[n]{n^n.\sqrt[n]{n^{n^2}.\sqrt[n]{n^{n^3}...\sqrt[n]{n^{n^{16}}}}}}}{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{(n^4)^{n^4}}}}}}$$

Resolución:

Sea el numerador A:

$A = \sqrt[n]{n^n.\sqrt[n]{n^{n^2}.\sqrt[n]{n^{n^3}...\sqrt[n]{n^{n^{16}}}}}}$

Por inducción matemática:

Para 2 radicales:

$\sqrt[n]{n^n.\sqrt[n]{n^{n^2}}} = n.\sqrt[n^2]{n^{n^2}} = n.n = n^2$

Para 3 radicales:

$\sqrt[n]{n^n\sqrt[n]{n^{n^2}\sqrt[n]{n^{n^3}}}} = n.\sqrt[n^2]{n^{n^2}}.\sqrt[n^3]{n^{n^3}} = n.n.n = n^3$

⋮

Para 16 radicales:

$\sqrt[n]{n^n\sqrt[n]{n^{n^2}\sqrt[n]{n^{n^3}...\sqrt[n]{n^{n^{16}}}}}} = \underbrace{n.n.n...n}_{16\text{ veces}} = n^{16}$

Sea el denominador B:

$B = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{(n^4)^{n^4}}}}} = \sqrt[n^4]{(n^4)^{n^4}} = n^4$

Nos piden: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{n^{16}}{n^4} = n^{12}$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Son aquellas expresiones en las que figuran constantes y letras a excepción de las siguientes:

$F(x) = 7^{3x}$	:	Función exponencial	En el álgebra universitaria toman el nombre de expresiones trascendentes.
$I(x) = \log x^2$	:	Función logarítmica	
$B(x) = \tan(2x + 3)$	:	Función trigonométrica	

Ejemplos:

$P(x, y) = 5x^{\frac{1}{3}}y + \frac{7}{2}x^2 + 10x + \frac{a^2}{b^2} - 3a^3b^7$ — Expresión algebraica

$R(x) = \frac{21}{121}x^7 - \frac{\pi\sqrt{a}}{b^2}$ — Expresión algebraica

$A(x) = \operatorname{sen}(3x) + \tan(x) + x^3 + 3$ — Expresión trascendente

Recuerda

- Las representaciones de las cantidades algebraicas son, generalmente, las siguientes:
  Constantes: a, b, c ...
  Variables: x, y, z...
- Para un polinomio de una sola variable:
  $P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$
  $a_0 \neq 0$: coeficiente principal (coef. de la variable con mayor exponente).
  a_n: Término independiente
  Si: $a_0 = 1 \Rightarrow P_{(x)}$: polinomio mónico.



TIPOS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Por su naturaleza

Expresiones algebraicas racionales. En este caso las expresiones algebraicas no tienen parte literal afectada de un exponente fraccionario.

Expresiones algebraicas racionales enteras. En este tipo de expresiones la parte literal posee exponentes enteros y positivos ($\mathbb{Z}^+$).

Ejemplos:

$A(x, y) = \sqrt[3]{3}\,x^2y + 7x^3y^2 + y^{10}$ $\qquad$ $B(x, y) = \frac{x^4y^3}{\sqrt{3}} + xy^9 + x^{10}y^9$

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias. En este tipo de expresiones la parte literal posee exponentes enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$) al menos en un término.

Ejemplos:

$C(m, n) = 7amn^{-2} + m^2 + n^2$ $\qquad$ $D(x, y, z) = x^2y^{-3}z^{-3} + xy^2z^2 + \frac{a}{b}xyz^3$

Expresiones algebraicas irracionales. En este caso las expresiones algebraicas tienen parte literal afectada de un exponente fraccionario.

Ejemplos:

$E(a, b, c) = 5a^7\sqrt[7]{b} + c^3 - 3a^{\frac{1}{3}}b^2$ $\qquad$ $F(x, y, z) = 10x^{\frac{1}{2}}y^{10}z^2 + \frac{1}{2}x^{10}y^9z^3 + a^{10}xy^2$

Por su número de términos

1 término : $P(x, y) = 2x^7y^2z^3$	:	Monomio	
2 términos : $P(x, y) = x + y$	:	Binomio	Multinomio
3 términos : $P(x, y, z) = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{x^{-2}y}{a} + z^3$	:	Trinomio	
⋮ ⋮		⋮	
n términos : $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$	:	Polinomio	

POLINOMIO

Es un multinomio donde sus términos son racionales enteros.

Término algebraico

Es una expresión algebraica donde las operaciones de suma y resta no están presentes.



Ejemplo:

$$P_{(x,\,y,\,z)} = \underbrace{5a^2}_{\text{Coeficiente}} \underbrace{\frac{x^{a+b}}{y^{-2}z^{-\frac{1}{3}}}}_{\text{Parte literal}} \Rightarrow P_{(x,\,y,\,z)} = 5a^2x^{a+b}y^2z^{\frac{1}{3}}$$

Términos semejantes

Dos o más términos son semejantes si estos poseen la misma parte literal.
Ejemplos:

		Igual parte literal
$x^2\sqrt{y}$; $2x^2\sqrt{y}$; $3x^2\sqrt{y}$	$\Rightarrow$	$x^2\sqrt{y}$
$100x^2y^{\frac{1}{2}}$, $20x^2y^{\frac{1}{2}}$; $-\sqrt{3}\,x^2y^{\frac{1}{2}}$	$\Rightarrow$	$x^2y^{\frac{1}{2}}$
$7x^{a+b}y^2z^{\frac{1}{3}}$; $-x^{a+b}y^2z^{\frac{1}{3}}$; $5x^{a+b}y^2z^{\frac{1}{3}}$	$\Rightarrow$	$x^{a+b}y^2z^{\frac{1}{3}}$

Atención

- Solo se pueden sumar y restar términos semejantes:
  $3x^2\sqrt{y} - 2x^2\sqrt{y} + 3x^2\sqrt{y}$
  $= (3 - 2 + 3)x^2\sqrt{y}$
  $= 4x^2\sqrt{y}$
- $-(3x + 5 - y) = -3x - 5 + y$

  En este caso, si el signo menos precede a un signo de colección (paréntesis), para no considerarlo tenemos que cambiar de signo a toda la expresión que aparece dentro.



GRADO

Es aquel número entero y positivo que actúa como exponente sobre una variable tomada como base. Para su mejor estudio lo clasificaremos como grado de un monomio y grado de un polinomio:

Grado de un monomio

Veamos:

$$P(x, y) = 7^m\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{3m+5n}y^{2m-n}$$

Grado relativo (GR)	Grado absoluto (GA)
Es el exponente de la variable considerada $GR(x) = 3m + 5n$ $GR(y) = 2m - n$	Es la suma de los exponentes de todas sus variables. $GA(P) = (3m + 5n) + (2m - n)$ $GA(P) = 5m + 4n$

Grado de un polinomio

$$F(x, y, z) = \sqrt{3}\,x^{\overbrace{a+2}y^{b+2}z^{c+1}}_{} \ldots$$

$$F(x, y, z) = \sqrt{3}\,\overbrace{x^{a+2}y^{b+2}z^{c+1}}^{GA\,=\,a+b+c+5} + 2\overbrace{x^{a+7}y^{b+4}z^{c}}^{GA\,=\,a+b+c+11} - \frac{10a^2}{bc}\overbrace{x^{a+1}y^{b}z^{c+9}}^{GA\,=\,a+b+c+10} + \overbrace{x^{a}z^{c}}^{GA\,=\,a+c}$$

Grado relativo (GR)	Grado absoluto (GA)
Es el mayor exponente de la variable en referencia: $GR(x) = a + 7$; $GR(y) = b + 4$; $GR(z) = c + 9$	Es el mayor grado absoluto de uno de sus términos: $GA(F) = a + b + c + 11$



Observación

Considera las propiedades:

1. Si: $P(x) = (10x^m - 1)(x^n + 2)$
   $\Rightarrow \boxed{GA(P) = m + n}$
2. Si: $B(x) = \dfrac{10x^m + 6}{2x^n + 1}$
   $\Rightarrow \boxed{GA(B) = m - n}$
3. Si: $R(x) = (2x^m + 13)^n$
   $\Rightarrow \boxed{GA(R) = m\,.\,n}$
4. Si: $T(x) = \sqrt[n]{7x^m + 3}$
   $\Rightarrow \boxed{GA(T) = \dfrac{m}{m}}$

POLINOMIOS ESPECIALES

Polinomio homogéneo

Es aquel polinomio que se caracteriza por poseer todos sus términos de igual grado.

Ejemplo:

$$P(x, y) = \frac{7}{c}\overbrace{x^9}^{9} + \frac{2}{b}\overbrace{x^7y^2}^{9} + \overbrace{y^9}^{9} - \frac{31}{a}\overbrace{x^5y^4}^{9}$$

Luego: P(x, y) es homogéneo de noveno grado o el grado de homogeneidad de P es 9.

Polinomio ordenado

Se caracteriza por los exponentes de sus variables (letra ordenatriz), los cuales están dispuestos ordenadamente de manera ascendente o descendente.

Ejemplo:
$T(x, y, z) = 3x^{10}yz + 21x^7y^6z^2 - 7x^4y^3z^5 + 9x^2yz^9$
Con respecto a **x** está ordenado en forma descendente.
Con respecto a **y** está desordenado.
Con respecto a **z** está ordenado en forma ascendente.

Polinomio completo

Es aquel que cuando se toma de referencia a una de sus variables (letras) tienen todos sus exponentes desde el exponente cero (término independiente) hasta el mayor en forma consecutiva.

Ejemplos:

- $P(x) = 21x^3 + 7x^5 - 2x^4 + 20 - x^2 + 9x$
  Este polinomio P es completo respecto a x, pero está desordenado.
- $Q(x, y) = 12x^4 + 7x^3y - 2xy^2 + 4y^3$
  Este polinomio Q es completo respecto a y, pero no respecto a x.

Observación

En todo polinomio completo y ordenado respecto a una variable x, se cumple que:

n.° términos = GA(P) + 1

Siendo P un polinomio en x.



Polinomios idénticos

Son aquellos polinomios reducidos cuyos coeficientes que precedan a sus términos semejantes son iguales.

Los polinomios:
$Ax^n + Bx^{n-1} + ... + C \equiv Mx^n - Nx^{n-1} + ... + P$ son idénticos.

Luego se cumple que:

$$A = M;\ B = -N; ...; C = P$$

Condición aprovechable:
En este tipo de polinomios podemos asignarle un sistema de valores a la variable o variables y tendremos el mismo valor en ambos miembros.

Ejemplo:
De los polinomios idénticos: $2(x + 3) \equiv A(x - 1) + B(x + 2)$, determina: $A \div B$
Para valores adecuados de x, obtenemos A y B:

Para $x = 1 \Rightarrow 2(1 + 3) = A(1 - 1) + B(1 + 2) \Rightarrow B = \frac{8}{3}$

Para $x = -2 \Rightarrow 2(-2 + 3) = A(-2 - 1) + B(-2 + 2) \Rightarrow A = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A}{B} = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{4}$

Polinomio idénticamente nulo

Un polinomio reducido cumple esta condición cuando los coeficientes de sus términos son iguales a cero o nulos.

El polinomio: $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + ... + D = 0$ es idénticamente nulo, entonces cumple:

$$A = B = C = ... = D = 0$$



Ejemplo:
Sea: $T(x, y) = (a^3 - 8)x^6 + (a - b - 3)xy^2 + (c - 7)xy^3 = 0$
Calcula: $3a - b - c$
Se cumple:

$$\left.\begin{aligned} a^3 - 8 &= 0 \Rightarrow a = 2 \\ a - b - 3 &= 0 \Rightarrow b = -1 \\ c - 7 &= 0 \Rightarrow c = 7 \end{aligned}\right\} \therefore 3a - b - c = 0$$

Nota

- Si un polinomio de grado "n" se anula para más de "n" valores de la variable, entonces es idénticamente nulo.

VALOR NUMÉRICO

El valor numérico de una expresión algebraica es el valor que esta toma cuando se le asigna determinados valores a sus variables.

Valor numérico directo (sin condiciones)

Ejemplo:

Dada la expresión: $A(x, y) = \frac{3x^2y}{7} + \frac{1}{x - y}$

Halla:

$A(0, 1) = \frac{3(0)^2(1)}{7} + \frac{1}{0 - 1} = 0 + \frac{1}{-1} = -1$



$$A(2, 0) = \frac{3(2)^2(0)}{7} + \frac{1}{2-0} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A(m, n) = \frac{3(m)^2 n}{7} + \frac{1}{m-n} = \frac{3m^2 n}{7} + \frac{1}{m-n}$$

Valor numérico indirecto (con condiciones)

Caso I:

Ejemplos:

Si: $P(2x - 1) = x^3 - 2x + 1$, determina P(1).

Resolviendo la ecuación tenemos:

$2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 : P(1) = 1^3 - 2(1) + 1 = 0$

Si: $P(x) = 2x + 1 \wedge Q(P(x)) = x^2 + 3$

Determina Q(5)

$\Rightarrow Q(5) = Q(2x + 1)$

$5 = 2x + 1$

$2 = x$

$Q(5) = (2)^2 + 3 = 7$

$\therefore Q(5) = 7$

Caso II:

Ejemplo:

Si: $F(x + 3) = x^2 + 3x - 5$, calcula F(x).

1.ª Forma de solución. En el segundo miembro le damos una forma adecuada, de tal manera que en la expresión inicial se tenga todo en función de x + 3.

Veamos:

$F(x + 3) = x(x + 3) - 5$

Se observa que ya aparece el (x + 3) en el segundo miembro, pero no es el único ya que el factor “x” se puede expresar como:

$$x = x + 3 - 3$$

Nótese que es necesario detectar todos los x + 3 posibles:

$$F(x + 3) = ((x + 3) - 3)(x + 3) - 5$$

Hecho esto, donde figure (x + 3) lo reemplazamos por x:

$F(x + 3) = ((x + 3) - 3)(x + 3) - 5$

$F(x) = (x - 3)x - 5$

$\therefore F(x) = x^2 - 3x - 5$

2.ª Forma de solución. Realizando un cambio de variable: x + 3 = y, de esta despejamos x: x = y – 3. En la expresión inicial ponemos todo en función de “y”.

Veamos:

$F(x + 3) = x^2 + 3x - 5$

$F(y) = (y - 3)^2 + 3(y - 3) - 5 \Rightarrow F(y) = y^2 - 3y - 5$

Una vez reducida, hacemos: y = x

$\therefore F(x) = x^2 - 3x - 5$

Recuerda

Tenga presente los valores numéricos notables:

Sea el polinomio P(x):

Suma de coeficientes

$\sum coef.(P) = P(1)$

Término independiente

$TI(P) = P(0)$



EFECTUAR

1. Calcula el GA de $M(x; y) = -5x^2y^3$
2. Encuentra el GR (n), si $N(m; n) = 6m^6n^7$
3. Halla el grado absoluto de:
   $M(x; y; z) = (-4xy^2z^3)^3 : (16x^3y^4z^6)$
4. Si el GA de $(-2x^ay^4)^3$ es 18, halla a^3.
5. El GA de $L(m; n; p) = -\frac{2}{3}m^3n^2p$ es:
6. El GA del polinomio
   $P(x) = -2x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 9x - 6$ es:
7. Si $P(x) = x^{m+2} + 2x^{m+1} - x^m - 1$ tiene GA = 8, entonces el valor de m es:
8. Calcula el GA de: $M(x; y; z) = \frac{5}{9}x^{2a+3}y^{a-1}z^{2-3a}$
9. Dado: $M(x; y) = (-4x^5y^3)^3$
   Calcular: GA (M) – GR (y)
10. Dado: $M(x; y) = (5x^ay^b)^3$, calcula a – b, si: GA(M) = 18 y GR(y) = 9
11. Dados: $P(x) = ax^3 - 2x^2 + 5x - 2$
    $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - a$
    Si P(x) – Q(x) se reduce a un polinomio de GA = 2, halla dicha diferencia.
12. Calcula mn, si el polinomio:
    $P(x; y) = 4x^my^4 - 3x^6y^2 + 5x^3y^{n+5}$ es homogéneo.

Problemas resueltos

1 Sea el polinomio ordenado y completo:

$$B(x) = \frac{d}{3a}x^{b^b + a^{a^a} + 21} + \frac{7}{3d}x^{a^{a^a} + 7a + 33} - \frac{108}{b^b}x^{7a + 48} - \frac{a^a}{d^d}x^{c^7 - a^{a^a} - 2 + 61} + ... + (bc)^a$$

Calcula el término independiente.

Resolución:

Como el polinomio es completo hacemos que sus grados relativos respecto a x para sus cuatro primeros términos sean iguales mediante el siguiente artificio:

$$\underset{(i)}{b^b + a^{a^a} + 21} = \underset{(ii)}{a^{a^a} + 7a + 33 + 1} = \underset{(iii)}{7a + 48 + 2} = \underset{(iv)}{c^7 - a^{a^a} - 2 + 61 + 3}$$

De (ii) y (iii):

$$a^{a^a} + 7a + 34 = 7a + 50$$
$$a^{a^a} = 2^{2^2} \Rightarrow a = 2$$

De (i) y (ii):

$$b^b + a^{a^a} + 21 = a^{a^a} + 7a + 34$$
$$b^b = 3^3 \Rightarrow b = 3$$

De (iii) y (iv):

$$7a + 50 = c^7 - a^{a^a} - 2 + 64$$
$$7(2) + 50 = c^7 - 2^{2^{2^2}} - 2 + 64$$
$$c^7 = 2^{14} \Rightarrow c^7 = 4^7 \Rightarrow c = 4$$

Nos piden:

$TI(B(x)) = (bc)^a = (3(4))^2 = 144$

2 Determina la suma de coeficientes del siguiente polinomio homogéneo:

$$z(x; y; z; w) = q^p x^{p^q} + \left[\frac{r}{q}\right]^3 y^{r^p} + \sqrt[p]{r}\, z^{\sqrt{r}^{\sqrt{r}}} + w^{(pq)^p}$$

Resolución:

Por ser un polinomio homogéneo se cumple:

$$\underset{(i)}{p^q} = \underset{(ii)}{r^p} = \underset{(iii)}{\sqrt{r}^{\sqrt{r}}} = \underset{(iv)}{(pq)^p}$$

De (ii) y (iv):

$r^p = (pq)^p \Rightarrow r = pq$ ...(1)

De (ii) y (iii):

$$r^p = \sqrt{r}^{\sqrt{r}} \Rightarrow r^p = r^{\frac{\sqrt{r}}{2}} \Rightarrow 2p = \sqrt{r}$$

$4p^2 = r$ ...(2)

2 en 1: $4p^2 = pq$

$q = 4p$ ...(3)

(i) y (ii): $p^q = r^p$ ...(4)

(3) en (4):

$p^{4p} = r^p$

$(p^4)^p = r^p \Rightarrow r = p^4$ ...(5)

(5) en (2):

$p^4 = 4p^2 \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p^2 = 2^2 \Rightarrow p = 2$

"p" en (5): $r = p^4 = 2^4 = 16 \Rightarrow r = 16$

"p" en (3): $q = 4p \Rightarrow q = 4(2) = 8 \Rightarrow q = 8$

La suma de coeficientes del polinomio será:

$$\Sigma coef.(z) = z_{(1;\,1;\,1;\,1)} = q^p + \left(\frac{r}{q}\right)^3 + \sqrt[p]{r} + 1$$
$$= 8^2 + \left(\frac{16}{8}\right)^3 + \sqrt[2]{16} + 1 = 77$$

$\therefore \Sigma coef(z) = 77$

3 Determina la suma de los términos que faltan para que el siguiente polinomio sea completo:

$$L(z) = z^{3r}(z^q + z^{q-1} + z^{q-2} + ... + z^{4r})$$

Resolución:

Para que el polinomio sea completo respecto a **z** debe contener todos los exponentes, desde el mayor hasta el exponente cero en forma consecutiva. Veamos:

$$L(z) = z^{3r+q} + z^{3r+q-1} + z^{3r+q-2} + ... + z^{7r}$$

Van disminuyendo de uno en uno, luego:

$$L(z) = z^{3r+q} + z^{3r+q-1} + z^{3r+q-2} + ... + z^{7r} + \underbrace{z^{7r-1} + z^{7r-2} + ... + z^2 + z + 1}_{\text{Términos que faltan para que L(z) sea completo}}$$

Nos piden:

$$z^{7r-1} + z^{7r-2} + z^{7r-3} + ... + z^2 + z + 1 = \frac{z^{7r} - 1}{z - 1}$$

$\therefore$ La suma de términos que faltan: $\dfrac{z^{7r} - 1}{z - 1}$

4 Se presenta el siguiente polinomio idénticamente nulo:

$$C(x) = (m^7 + 7m^{-1}n^7p^7 - n^7p^7)^7x^7 + (n^7 + 9n^{-1}m^7p^7 - m^7p^7)^5x^5 - 10(p^7 + 11p^{-1}m^7n^7 - m^7n^7)^3x^3 + (m + n + p - 55)$$

Halla el valor de:

$$Z = \frac{m^8}{n^7p^7} + \frac{n^8}{m^7p^7} + \frac{p^8}{m^7n^7}$$

Resolución:

El polinomio ya está reducido para sus variables respectivas: x^7, x^5 y x^3, luego sus coeficientes respectivos serán ceros:

- $m^7 + \dfrac{7n^7p^7}{m} - n^7p^7 = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{m^8}{n^7p^7} = m - 7$ ...(1)



- $n^7 + \dfrac{9m^7p^7}{n} - m^7p^7 = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{n^8}{m^7p^7} = n - 9 \qquad ...(2)$
- $p^7 + \dfrac{11m^7n^7}{p} - m^7n^7 = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{p^8}{m^7n^7} = p - 11 \qquad ...(3)$
- $m + n + p - 55 = 0 \quad \Rightarrow \; m + n + p = 55 \qquad ...(4)$

Sumando miembro a miembro (1), (2) y (3):

$$\underbrace{\frac{m^8}{n^7p^7} + \frac{n^8}{m^7p^7} + \frac{p^8}{m^7n^7}}_{Z} = \underbrace{(m+n+p)}_{(4)} - (7+9+11)$$

$$Z = 55 - 27 \Rightarrow Z = 28$$

5 Si el polinomio:
$P(x;\,y) = ax^{a+b}y^{ab-1} + bx^{a-b}y^{11}$; $(a;\,b > 0)$ es homogéneo, y la relación de los exponentes de x en sus dos términos es de 3 a 1. Calcula el valor de a^b.

Resolución:

Por dato, el polinomio es homogéneo, entonces:

$$P(x;\,y) = \underbrace{ax^{a+b}y^{ab-1}}_{\substack{\text{Grado}\\ a+b+ab-1}} + \underbrace{bx^{a-b}y^{11}}_{\substack{\text{Grado}\\ a-b+11}}$$

Igualando y simplificando: $2b + ab = 12 \qquad ...(I)$

Además: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow a = 2b \qquad ...(II)$

Reemplazando (II) en (I):

$2b + 2b(b) = 12$

$b^2 + b - 6 = 0$

$b \quad +3$

$b \quad -2$

$\Rightarrow b = 2 \; (b > 0)$

$\therefore a = 4$

Piden: $a^b = 4^2 = 16$

6 Si: $P(x) = \dfrac{(x+1)}{(x-1)}$; además: $P(G(x)) = \dfrac{x}{(x-2)}$, halla G(5).

Resolución:

$P(x) = \dfrac{(x+1)}{(x-1)}$

$P(G(x)) = \dfrac{G(x)+1}{G(x)-1} = \dfrac{x}{(x-2)}$

$(x-2)(G(x)+1) = x(G(x)-1)$

$xG(x) + x - 2G(x) - 2 = xG(x) - x$

Despejando:

$-2(G(x)) = -x - x + 2$

$-2(G(x)) = -2x + 2$

$G(x) = x - 1$

Entonces:

$G(5) = 5 - 1$

$G(5) = 4$

7 Sabiendo que: $P(x) = 3x + 4$ y $P(P(x)) = ax + b$, calcula: $\sqrt{P\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)}$

Resolución:

$P(P(x)) = ax + b \quad ...(I)$

$P(x) = 3x + 4$

Cambiando x por P(x):

$P(P(x)) = 3P(x) + 4$

$P(P(x)) = 3(3x+4) + 4$

$P(P(x)) = 9x + 16 \quad ...(II)$

De (I) y (II):

$a = 9$ y $b = 16$

Nos piden:

$\sqrt{P\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)} = \sqrt{P\left(\sqrt{\dfrac{9}{16}}\right)} = \sqrt{P\left(\dfrac{3}{4}\right)}$

$P\left(\dfrac{3}{4}\right) = 3\left(\dfrac{3}{4}\right) + 4 = \dfrac{25}{4}$

Luego: $\sqrt{P\left(\dfrac{3}{4}\right)} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$

8 En la siguiente identidad:
$x^2 + 5x - 2 = A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x+1) + C(x+1)(x-1)$,
halla el valor de: $(A + B + C)^2 + 8$

Resolución:

$x^2 + 5x - 2 = A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x+1) + C(x+1)(x-1)$

Sea:

$x = 1 \;\Rightarrow\; 1^2 + 5 - 2 = B(-1)(2) \;\Rightarrow B = -2$

$x = 2 \;\Rightarrow\; 2^2 + 5(2) - 2 = C(3)(1) \;\Rightarrow C = 4$

$x = -1 \Rightarrow (-1)^2 + 5(-1) - 2 = A(-2)(-3) \Rightarrow A = -1$

Nos piden:

$(A+B+C)^2 + 8 = (-1-2+4)^2 + 8 = 1 + 8 = 9$

9 Dados los polinomios:
$P(x;\,y) = x^{2m+2} + x^{m+1}y^m + x^{m-1}y^{m+1} + x^{2m}y$
$Q(x;\,y) = x^{m+1} + x^3y^{m-1} + xy^{m+2} + x^{m+1}y$
calcula el GR de x en Q si se sabe que el GA de P es al GA de Q como 4 es a 3.

Resolución:

$$P(x;\,y) = \underbrace{x^{2m+2}}_{GA\,=\,2m+2} + \underbrace{x^{m+1}.\,y^m}_{GA\,=\,2m+1} + \underbrace{x^{m-1}.\,y^{m+1}}_{GA\,=\,2m} + \underbrace{x^{2m}.\,y}_{GA\,=\,2m+1}$$

$\Rightarrow \; GA(P) = 2m + 2$

$$Q(x;\,y) = \underbrace{x^{m+1}}_{GA\,=\,m+1} + \underbrace{x^3.\,y^{m-1}}_{GA\,=\,m+2} + \underbrace{x.y^{m+2}}_{GA\,=\,m+3} + \underbrace{x^{m+1}.y}_{GA\,=\,m+2}$$

$\Rightarrow GA(Q) = m + 3$

Del dato: $\dfrac{GA(P)}{GA(Q)} = \dfrac{2m+2}{m+3} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow m = 3$

Nos piden: $GR_x(Q)$:

$GR_x(Q) = m + 1 = 3 + 1 = 4$

PRODUCTOS NOTABLES

Observación

Siendo: $n \in \mathbb{Z}$; se cumple:

$$(x - y)^{2n} = (y - x)^{2n}$$



CONCEPTO

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1. Binomio al cuadrado (tcp: trinomio cuadrado perfecto)

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

Ejemplo:

$[(2a + 3) - (6a + 5)]^2 = (-4a - 2)^2 = [2(2a + 1)]^2 = 4(2a + 1)^2 = 4[(2a)^2 + 2(2a) + 1^2] = 4(4a^2 + 4a + 1)$

COROLARIO: Identidades de Legendre

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

$$(x + y)^4 - (x - y)^4 = 8xy\,(x^2 + y^2)$$

Ejemplo:

Siendo: $a \neq -1$

$$\left[(a+1)+\left(\frac{1}{a+1}\right)\right]^4-\left[(a+1)-\left(\frac{1}{a+1}\right)\right]^4 = 8\cancel{(a+1)}\left(\frac{1}{\cancel{(a+1)}}\right)\left[(a+1)^2+\left(\frac{1}{a+1}\right)^2\right]$$

$$= 8\left[(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}\right]$$

Atención

En algunos casos conviene hacer el proceso inverso de este producto notable (así como en otros):

$$a^2 - \frac{1}{a^2} = \underbrace{\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{a}\right)}$$

A este proceso de solución se le denomina factorización.



2. Diferencia de cuadrados

En forma general lo podemos representar como:

$$(ax^m + by^n)(ax^m - by^n) = (ax^m)^2 - (by^n)^2 = a^2x^{2m} - b^2y^{2n}$$

Ejemplos:

- $(2x^2 + 3y^3)(2x^2 - 3y^3) = (2x^2)^2 - (3y^3)^2 = 4x^4 - 9y^6$
- $(2a + b + c)\underbrace{(b - c)}_{\text{artificio}} = ((a + b) + (a + c))((a + b) - (a + c)) = (a + b)^2 - (a + c)^2$

3. Identidad de Stevin (multiplicación de binomios con un término común).

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Ejemplo:

- $\left(\frac{1}{b}+5\right)\left(\frac{1}{b}-7\right) = \left(\frac{1}{b}\right)^2 + [5 + (-7)]\left(\frac{1}{b}\right) + 5 - 7$

  $b \neq 0 \qquad = \frac{1}{b^2} - \frac{2}{b} - 35$

Ejemplo:

- $(2m - 1)(3m - 7) = (2)(3)m^2 + [2(-7) + (-1)3)]\,m + (-1)(-7)$

  $= 6m^2 - 17m + 7$

Nota

Como podrás apreciar, la identidad de Stevin funciona también cuando algunas de sus constantes son negativas ($a, b, c < 0$).

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$$

Ejemplo:

$(x + 2)(x - 3)(x + 4) = x^3 + (2 - 3 + 4)\,x^2 + [2(-3) + 2(4) + (-3)(4)]\,x + 2(-3)(4)$

$= x^3 + 3x^2 - 10x - 24$



4. Binomio al cubo

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

Ejemplo:

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{3})^3 - 3(\sqrt[3]{3})^2(\sqrt[3]{2}) + 3(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2})^2 - (\sqrt[3]{2})^3 = 1 - 3(\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{2}) + 3(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4})$$
$$= 1 - 3\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12}$$

COROLARIO: Identidades de Cauchy (forma abreviada del desarrollo de un binomio al cubo)

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y)$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt[3]{q} + \frac{1}{\sqrt[3]{q}}\right)^3 = (\sqrt[3]{q})^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{q}}\right)^3 + 3(\sqrt[3]{q})\left(\frac{1}{\sqrt[3]{q}}\right)\left(\sqrt[3]{q} + \frac{1}{\sqrt[3]{q}}\right) = q + \frac{1}{q} + 3\left(\sqrt[3]{q} + \frac{1}{\sqrt[3]{q}}\right)$$

5. Binomio por trinomio: suma o diferencia de cubos

Expresión general: $(x^m \pm y^n)(x^{2m} \mp x^my^n + y^{2n}) = x^{3m} \pm y^{3n}$

Ejemplo:

$$(\sqrt[3]{7} - 3)(\sqrt[3]{49} + 3\sqrt[3]{7} + 9) = (\sqrt[3]{7} - 3)((\sqrt[3]{7})^2 + (\sqrt[3]{7})(3) + (3)^2) = (\sqrt[3]{7})^3 - (3)^3 = 7 - 27 = -20$$

Atención

Es necesario que recuerdes lo siguiente:

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x(x^2 + 3y^2)$$
$$(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y(3x^2 + y^2)$$

6. Trinomio al cuadrado

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

Ejemplo:

$$(p - 3q - 5r)^2 = p^2 + (-3q)^2 + (-5r)^2 + 2[p(-3q) + p(-5r) + (-3q)(-5r)] = p^2 + 9q^2 + 25r^2 + 2(-3pq - 5pr + 15qr)$$



7. Identidades de Lagrange

Con dos variables

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

Con tres variables

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$$

8. Identidad trinómica de Argand

$$(x^{2m} + x^my^n + y^{2n})(x^{2m} - x^my^n + y^{2n}) = x^{4m} + x^{2m}y^{2n} + y^{4n}$$

Nota

Veamos un ejemplo para la identidad trinómica de Argand

$(4q^2 + 2rq + r^2)(4q^2 - 2rq + r^2) =$

$[(2q)^2 + (2q)(r) + r^2][(2q)^2 - (2q)(r) + r^2] =$

$(2q)^4 + (2q)^2(r)^2 + r^4 = 16q^4 + 4q^2r^2 + r^4$

9. Identidades de Gauss (identidades auxiliares)

A) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

Ejemplo:

- Si: $a + b + c = 2$; $abc = 1$; $a^3 + b^3 + c^3 = 5$. Determina: $a^2 + b^2 + c^2$ y $ab + ac + bc$

Resolución:

Consideremos el trinomio al cuadrado y la identidad de Gauss:

$$\underbrace{(a + b + c)^2}_{z} = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{x} + 2\underbrace{(ab + ac + bc)}_{y}$$

$$\underbrace{a^3 + b^3 + c^3}_{5} - 3\underbrace{abc}_{1} = \underbrace{(a + b + c)}_{2}(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{x} - \underbrace{ab - ac - bc}_{y})$$

$$\left.\begin{matrix} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{matrix}\right\} \quad \text{Donde: } x = 2, \; y = 1$$

Reponiendo las expresiones: $x = a^2 + b^2 + c^2 = 2$

$y = ab + ac + bc = 1$

B) $(x + y)(x + z)(y + z) + xyz = (x + y + z)(xy + xz + yz)$

Ejemplo:

- Considerando los datos del ejemplo anterior, determine: $(a + b)(a + c)(b + c)$

Resolución:

Como se pudo apreciar del ejemplo anterior: $ab + ac + bc = 1$

Luego, de esta última identidad: $(a + b)(a + c)(b + c) + \underbrace{abc}_{1} = \underbrace{(a + b + c)}_{2}\underbrace{(ab + ac + bc)}_{1}$

Obtenemos: $(a + b)(a + c)(b + c) = (2)(1) - 1 = 1$ $\therefore (a + b)(a + c)(b + c) = 1$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2]$



Atención

El dominio de los principales productos notables es indispensable para el desarrollo de los siguientes capítulos, en especial el de "factorización".

Practica varios ejercicios para que logres memorizarlos adecuadamente.

10. Identidades condicionadas

A) Si: $x + y + z = 0$, entonces: $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + xz + yz)$

Ejemplo:

Si: $a + b + c = 0$. Calcula: $T = \dfrac{(a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2}{ab + ac + bc}$

Resolución:
Desarrollamos los binomios al cuadrado:

$$T = 2\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc} + \frac{ab + ac + bc}{ab + ac + bc}\right) = 2(-2 + 1) = 2(-1) = -2$$

B) Si: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ entonces: $x = y = z$

Ejemplo:

Si: $p^2 + q^2 + r^2 = pq + pr + qr$. Determina: $M = \dfrac{(p + q)(p + r)(q + r) + 122pqr}{(q - p)^2 + (r - p)^2 + (r - q)^2 + 10(p^3 + q^3 + r^3)}$

Resolución:

Según la condición, se concluye: $p = q = r$

Reemplazando en M: $M = \dfrac{(2q)(2q)(2q) + 122q^3}{0 + 10(q^3)(3)} = \dfrac{130}{30} = \dfrac{13}{3}$

Observación

Considera los casos especiales en $\mathbb{R}$:

En general:
Si:
$x^{2n} + y^{2n} + z^{3n} + ... + m^{2n} = 0$
$\sqrt[2n]{x} + \sqrt[2n]{y} + \sqrt[2n]{z} + ... + \sqrt[2n]{m} = 0$
Donde "n" $\in \mathbb{N}$
Entonces:
$x = y = z = ... = m = 0$



Caso especial en $\mathbb{R}$:

Si: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ es posible si y solo si: $x = y = z = 0$

Ejemplo:

Si: $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, simplifica: $A = \dfrac{(a - 3)^4 - b(c - 1)(a - 2) + 10(b - 1) + 9}{(a + 1)(b - 5)(c^2 - 9) - (a - 1)^2 + 19}$

Resolución:

Por condición: $a = b = c = 0 \Rightarrow A = \dfrac{(-3)^4 - 0 + 10(0 - 1) + 9}{(0 + 1)(0 - 5)(0^2 - 9) - (0 - 1)^2 + 19} = \dfrac{81 - 10 + 9}{(1)(5)(-9) - 1 + 19}$

$$A = \frac{80}{45 + 18} = \frac{80}{63}$$

11. Desarrollo de un trinomio al cubo

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz$

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y) + 3xz(x + z) + 3yz(y + z) + 6xyz$

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz$

$(x + y + z)^3 = 3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz$

Problemas resueltos



1 Si: $a^2 + b^2 = 7$, calcula:

$(a + b)^2 + (a - b)^2 + (a + b)(a - b) + 2b^2$

Resolución:

Por identidad de Legendre:

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ ...(1)

Por diferencia de cuadrados:

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ...(2)

Reemplazando (1) y (2) en:

$(a + b)^2 + (a - b)^2 + (a + b)(a - b) + 2b^2$

$= 2(a^2 + b^2) + a^2 - b^2 + 2b^2$

$= 2a^2 + 2b^2 + a^2 - b^2 + 2b^2$

$= 3a^2 + 3b^2 = 3(a^2 + b^2)$

Por dato tenemos:

$3(a^2 + b^2) = 3(7) = 21$

2 Simplifica:

$R = (a + b + 7)^2 - (a + b + 8)(a + b + 6)$

Resolución:

$a + b + 7 = x$

$\Rightarrow \quad a + b + 8 = x + 1$

$\Rightarrow \quad a + b + 6 = x - 1$

Reemplazando:

$R = x^2 - (x + 1)(x - 1)$

Por diferencia de cuadrados tenemos:

$R = x^2 - (x^2 - 1)$

$R = x^2 - x^2 + 1$

$R = 1$

3 Si: $x^2 - 4x - 1 = 0$

Halla: $E = x^6 + x^{-6}$

Resolución:

Del dato tenemos:

$x^2 - 4x - 1 = 0$

$x^2 - 1 = 4x \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 4$ ... (1)

Elevamos (1) al cuadrado:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2$$

$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ ... (2)

Elevamos (2) al cubo:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 = 18^3$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 18^3$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 18^3 - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 18^3 - 3(18) = 5778$$

4 Sabiendo que:

$(a + b + c + d)^2 = 4(a + b)(c + d)$

Calcula:

$M = \frac{a - c}{d - b} + \frac{b - c}{d - a}$

Resolución:

Haciendo: $a + b = x \quad \wedge \quad c + d = y$

Reemplazando:

$(x + y)^2 = 4xy$

$x^2 + 2xy + y^2 = 4xy$

$x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$(x - y)^2 = 0$

$\Rightarrow x = y$

Se tiene: $a + b = c + d$

$b - c = d - a \quad \wedge \quad a - c = d - b$

Piden:

$M = \frac{a - c}{d - b} + \frac{b - c}{d - a}$

Reemplazando tenemos:

$M = \frac{d - b}{d - b} + \frac{b - c}{b - c}$

$M = 1 + 1 = 2$

5 Calcula:

$$J = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^3 + (\sqrt{3} - \sqrt{5})^3 + (\sqrt{5} - \sqrt{7})^3}{(\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$$

Resolución:

Recordar: si: $a + b + c = 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Del enunciado observamos que:

$(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) = 0$

Luego se cumple:

$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^3 + (\sqrt{3} - \sqrt{5})^3 + (\sqrt{5} - \sqrt{7})^3$

$= 3(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{7})$

Reemplazando tenemos:

$$J = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{7})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{7})}$$

$J = 3$

6 Efectúa:

$$S = \frac{(x+5)^2 - (x-5)^2}{x} + \frac{(x+3)^2 - (x-3)^2}{2x} + \frac{(x+6)^2 - (x-6)^2}{3x}$$

Resolución:

Por identidad de Legendre:

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

Reemplazando en S tenemos:

$$S = \frac{4(5x)}{x} + \frac{4(3x)}{2x} + \frac{4(6x)}{3x} \Rightarrow S = 20 + 6 + 8 = 34$$

7 Simplifica:

$$E = \sqrt{(\sqrt{4ab} + a + b)^{1/2}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + 2\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

Resolución:

Simplificando:

$$E = \sqrt{(\sqrt{\underbrace{\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + 2\sqrt{ab}}_{\text{Binomio al cuadrado}}})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + 2\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$E = \sqrt{\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + 2\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$E = \sqrt{\underbrace{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}_{\text{Diferencia de cuadrados}} + 2\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$E = \sqrt{a - b + 2\sqrt{ab} + 2b}$$

$$E = \underbrace{\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}}_{\text{Binomio al cuadrado}}$$

$$E = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

$$E = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

8 Sabiendo que: $x + x^{-1} = 3$, determina el valor de:

$$M = [x^x + (x^{-1})^{x^{-1}}][x^{x^{-1}} + (x^{-1})^x]$$

Resolución:

Dato:

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

Al cubo:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18 \qquad \text{...(1)}$$

Nos piden:

$$M = \left(x^x + x^{-\frac{1}{x}}\right)\left(x^{\frac{1}{x}} + x^{-x}\right)$$

$$M = x^{x + \frac{1}{x}} + x^{x - x} + x^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}} + x^{-\frac{1}{x} - x}$$

$$M = x^3 + 1 + 1 + x^{-3}$$

Reemplazando (1):

$M = x^3 + x^{-3} + 2$

$M = 18 + 2 = 20$

9 Simplifica:

$$E = (x-200)^3 + (x+200)^2 + (200-x)^3 - (x-200)^2$$

Resolución:

Efectuamos E:

$E = (x-200)^3 + (x+200)^2 + (200-x)^3 - (x-200)^2$

$E = (x-200)^3 + (x+200)^2 + [-(x-200)]^3 - (x-200)^2$

$E = (x-200)^3 + (x+200)^2 - (x-200)^3 - (x-200)^2$

$E = (x+200)^2 - (x-200)^2$

Por identidad de Legendre:

$E = 4(x)(200) = 800x$

10 Si: $x^4 = y^4 + 24$; $x^2 + y^2 = 6$; $x + y = 3$

Calcula el valor de: $x - y$

Resolución:

Si: $x^4 = y^4 + 24 \Rightarrow x^4 - y^4 = 24$

$$\underbrace{(x^2 + y^2)}_{}(x^2 - y^2) = 24$$

Dato $\rightarrow 6(x^2 - y^2) = 24$

Luego: $x^2 - y^2 = 4$

$$\underbrace{(x + y)}_{}(x - y) = 4$$

Dato $\rightarrow 3(x - y) = 4$

$\therefore (x - y) = \frac{4}{3}$

COCIENTES NOTABLES

DEFINICIÓN

Son los resultados de las divisiones de la forma conocida $(x^n \pm y^n) \div (x \pm y)$, que se pueden escribir en forma directa sin efectuar la división correspondiente.

FORMA GENERAL DE UN COCIENTE NOTABLE (CN)

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y} = Q(x;y) \quad ; \; n \in \mathbb{Z}^+$$

Casos

Se presentan los siguientes casos:

I. $\frac{x^n - y^n}{x - y} = CN$; $\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}$

Donde n es par o impar.

Ejemplos:

1. $\frac{x^7 - y^7}{x - y} = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$

2. $\frac{x^6 - y^6}{x - y} = x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$

II. $\frac{x^n + y^n}{x + y} = CN$; $\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... - xy^{n-2} + y^{n-1}$

Cuando **n** es impar.

Ejemplos:

1. $\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$ El cociente es un polinomio homogéneo de 4.° grado.

2. $\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$

3. $\frac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$

III. $\frac{x^n - y^n}{x + y} = CN$; $\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... + xy^{n-2} - y^{n-1}$

Cuando **n** es par.

Ejemplos:

1. $\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

2. $\frac{x^6 - y^6}{x + y} = x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$

IV. Para el caso de: $\frac{x^n + y^n}{x - y}$; este NO es un cociente notable, sea n par o impar.



Observación

- El desarrollo del cociente notable tiene n términos.
- El grado del cociente es: n − 1

Nota

No olvidar los signos de los términos:
n: par o impar
$\frac{-}{-}$ = +, +, +, ..., + , +

Nota

Ten en cuenta los signos de los términos:
n: impar
$\frac{+}{+}$ = +, −, +, −, ..., − , +

Observación

- El cociente notable es un polinomio homogéneo.



Nota

Los signos de los términos
n: par
$\frac{-}{+}$ = + , − , + , − ... , +, −

Observación

- Los exponentes de la primera variable x disminuyen de uno en uno y los exponentes de la segunda variable y van aumentando de uno en uno.

TÉRMINO GENERAL

Si: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ es un cociente notable y t_k es el término que ocupa el lugar k en su desarrollo, entonces:

$$\boxed{t_k = (\text{signo})x^{n-k} \,.\, y^{k-1}} \quad 1 \leq k \leq n$$

Ejemplo:

Calcula el quinto término de: $\dfrac{a^{12} - b^{12}}{a - b}$

Resolución:

Reconocemos que: $n = 12$ y $k = 5$

Entonces: $t_5 = (+)a^{12-5} \,.\, b^{5-1} = a^7b^4$

Lugar de un cociente notable

La expresión $\dfrac{x^p \pm y^q}{x^r \pm y^s}$ da lugar a un cociente notable si se cumple:

$$\boxed{\frac{p}{r} = \frac{q}{s} = \text{n.° de términos}}$$

Los exponentes de la variable (x) deben disminuir de r en r; mientras que los de la variable (y) deben aumentar de s en s.

También debe notarse que tanto p/r como q/s deben ser **enteros** y **positivos** ya que ambas representan al número de términos, del cociente notable correspondiente.

Ejemplos:

Identifica si las siguientes expresiones son cocientes notables.

I. $\dfrac{x^8 - y^4}{x^2 - y}$ II. $\dfrac{x^{12} - y^6}{x^8 + y^4}$ III. $\dfrac{x^{18} + y^{12}}{x^3 - y^2}$

Resolución:

I. $\dfrac{x^8 - y^4}{x^2 - y} \Rightarrow$ n.° de términos $= \dfrac{8}{2} = \dfrac{4}{1} = 4$ (es un CN)

Entonces los exponentes de (x) disminuirán de 2 en 2, mientras que los exponentes (y) aumentarán de 1 en 1.

$$\frac{x^8 - y^4}{x^2 - y} = x^{8-2} + x^{8-4}y^1 + x^{8-6}y^{1+1} + y^{1+2}$$

$$\frac{x^8 - y^4}{x^2 - y} = x^6 + x^4y + x^2y^2 + y^3$$

II. $\dfrac{x^{12} - y^6}{x^8 - y^4} \Rightarrow$ n.° de términos $= \dfrac{12}{8} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

Como el n.° de términos no es un número entero, entonces no es un CN.

III. $\dfrac{x^{18} + y^{12}}{x^3 - y^2} \Rightarrow$ n.° de términos $= \dfrac{18}{3} = \dfrac{12}{2} = 6$

En este caso el n.° de términos resulta ser una cantidad entera, pero hay que recordar que la expresión $\dfrac{x^n + y^n}{x - y}$ no se encuentra en los casos de cocientes notables.

Por lo tanto: $\dfrac{x^{18} + y^{12}}{x^3 - y^2}$ no es un cociente notable.

Atención

El signo se colocará de acuerdo al caso que corresponda, así:

- Si el signo del divisor es: $x - y$
  $\Rightarrow t_k = +$ (siempre)
- Si el signo del divisor es: $x + y$
  $\Rightarrow$ k: impar $\Rightarrow t_k = +$
  k: par $\Rightarrow t_k = -$



Recuerda

- Al aplicar la fórmula del término general t_k la división debe adaptarse a la representación general de un cociente notable.

  Así mismo: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$
- Si n: impar
  $\Rightarrow$ hay un único término central (tc):
  $$t_c = t_{\frac{n+1}{2}}$$
- Si n: par
  $\Rightarrow$ existen dos términos centrales t_{c1} y t_{c2}:
  $$t_{c1} = t_{\frac{n}{2}} \wedge t_{c2} = t_{\frac{n}{2}+1}$$



Problemas resueltos



1 Del cociente notable $x^p - y^q$ entre $(x^2 - y)$ uno de sus términos es x^8y^7. Halla p + q.

Resolución:

Sea el cociente notable: $\dfrac{(x^2)^{p/2} - y^q}{x^2 - y}$

El término de lugar **k** será:

$t_k = (x^2)^{p/2 - k}\ y^{k-1} = x^8y^7$

Donde: $k - 1 = 7$

$k = 8$

Igualando exponentes:

$p - 2k = 8 \Rightarrow p = 8 + 2k = 8 + 2(8)$

$p = 24$

El número de términos estará dado por:

$\dfrac{p}{2} = q \Rightarrow q = \dfrac{24}{2} \Rightarrow 12 = q$

$q = 12$

$\therefore p + q = 36$

2 Calcula el cociente del tercer con el segundo término del desarrollo de:

$$\frac{m^2n^2 - r^{12}s^{12}}{\sqrt{mn} + r^3s^3}$$

Resolución:

Dándole forma de un cociente notable:

$$\frac{(\sqrt{mn})^4 - (r^3s^3)^4}{\sqrt{mn} + r^3s^3} = \sqrt{mn}^3 - \underbrace{\sqrt{mn}^2(r^3s^3)}_{2^o} + \underbrace{\sqrt{mn}(r^3s^3)^2}_{3^o} - (r^3s^3)^3$$

El cociente del 3.° con el 2.° término será:

$$\frac{\sqrt{mn}(r^3s^3)^2}{-\sqrt{mn}^2(r^3s^3)} \Rightarrow \quad \therefore \quad \frac{3^o}{2^o} = -\frac{r^3s^3}{\sqrt{mn}}$$

3 Al dividir $x^{32} - 8^{32}$ entre $x^8 - 8^8$, se obtiene como cociente el polinomio P(x).

Calcula:

$$E = \frac{(8^8)^5}{4} . P_{(8)}$$

Resolución

Dándole una forma adecuada y realizando el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{(x^8)^4 - (8^8)^4}{x^8 - 8^8} = (x^8)^3 + (x^8)^2(8^8) + (x^8)(8^8)^2 + (8^8)^3 = P_{(x)}$$

$\Rightarrow x = 8:\ P(8) = (8^8)^3 + (8^8)^2(8^8) + (8^8)(8^8)^2 + (8^8)^3$

$P(8) = 4(8^8)^3$

Cálculo del valor de E:

$$E = \frac{(8^8)^5}{\cancel{4}}\ \cancel{4}(8^8)^3 = (8^8)^8 = 8^{8.8} = 8^{8^2}$$

$\therefore E = 8^{8^2}$

4 Si el cociente notable de:

$$\frac{z^{75} - 1}{z^{3m} - 1}$$

Tiene 5 términos, calcula:

$m^9 + m^8 + m^7 + ... + m + 1$

Resolución:

El número de términos se expresa como:

$\dfrac{75}{3m} = 5 \Rightarrow m = 5$

Nos piden:

$5^9 + 5^8 + 5^7 + ... + 5 + 1 = \dfrac{5^{10} - 1}{5 - 1} \quad \therefore \dfrac{5^{10} - 1}{4}$

5 Calcula el número de término del cociente notable de:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Si se cumple que: $t_{10} . t_{50} . t_{100} = x^{236}$

Resolución:

El número de términos está dado por: n

Un término general estará expresado por:

$$t_k = x^{n-k}$$

Recordar que el divisor es de la forma: x – a, luego todos los términos son positivos.

Por condición del problema:

$t_{10} . t_{50} . t_{100} = x^{236}$

$(x^{n-10})(x^{n-50})(x^{n-100}) = x^{236}$

$x^{(n-10)+(n-50)+(n-100)} = x^{236}$

Igualamos exponentes:

$3n - 160 = 236$

$\therefore n = 132$

6 El desarrollo de un cociente notable genera 37 términos, dos de los cuales (consecutivos) son:

$$... + x^{3n+9}y^{12m+20} + x^{3m+6}y^{12m+24} ...$$

Calcula m.

Resolución:

Veamos la nueva representación:

$... + (x^3)^{n+3}(y^4)^{3m+5} + (x^3)^{m+2}(y^4)^{3m+6} ...$

De los términos que contienen: x^3

$m + 2 = (n + 3) - 1 \Rightarrow m = n$

$$\Rightarrow \frac{(x^3)^{37} - (y^4)^{37}}{x^3 - y^4}$$

El término cualquiera se verá como:

$t_k = (x^3)^{37-k}(y^4)^{k-1}$

Donde:

$(x^3)^{37-k}(y^4)^{k-1} = (x^3)^{n+3}(y^4)^{3m+5}$

Igualamos exponentes:

$\left.\begin{array}{l} 37 - k = n + 3 \\ k - 1 = 3m + 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 37 - k = m + 3 \\ k - 1 = 3m + 5 \end{array}\right\} \quad m = 7$

$\therefore\ m = 7$

7 Al desarrollar:

$$\frac{x^{mn} - y^n}{x^m - y}$$

el cuarto término es de grado 39 y los grados absolutos de los términos disminuyen de 2 en 2. Calcula el término t_8.

Resolución:

Expresión de un cociente notable: $\dfrac{(x^m)^n - y^n}{x^m - y}$

$t_4 \Rightarrow GA = 39$:

$t_4 = (x^m)^{n-4}y^{4-1} = x^{m(n-4)}y^3$

$GA = m(n - 4) + 3 = 39$

$m(n - 4) = 36$ ...(1)

$t_5 = (x^m)^{n-5}y^{5-1} = x^{m(n-5)}y^4$

$GA = m(n - 5) + 4 = 37$ (disminuyen de 2 en 2)

$m(n - 5) = 33$ ...(2)

de (1), (2): $mn - 4m = 36$

$mn - 5m = 33$

$m = 3$

Lo solicitado: t_8

$t_8 = (x^m)^{n-8}y^{8-1} = x^{m(n-8)}y^7$ ...(3)

Si: $m = 3 \Rightarrow mn = 33 + 5(3)$

$mn = 48$

De (3):

$t_8 = x^{mn-8m}y^7 = x^{48-8(3)}y^7 = x^{24}y^7$

$\therefore\ t_8 = x^{24}y^7$

8 ¿Qué relación debe existir entre a y b para que el siguiente cociente mostrado sea notable, si n es un número entero?

$$\frac{a(x^a)^{4n} - b(x^b)^{4n}}{ax^2 - b}$$

Resolución:

Efectuamos:

$$\frac{ax^{4an} - bx^{4bn}}{ax^2 - b}$$

Factorizamos x4bn:

$$= x^{4bn}\left[\frac{ax^{4an-4bn} - b}{ax^2 - b}\right]$$

$$= x^{4bn}\left[\frac{x^{4an-4bn} - \frac{b}{a}}{x^2 - \frac{b}{a}}\right]$$

Si genera un cociente notable, se cumple:

$\dfrac{4an - 4bn}{2} = 1$

$\Rightarrow 2an - 2bn = 1$

$\therefore 2an = 2bn + 1$

9 Halla (m.n) si el cociente:

$$\frac{x^{m+n}.y^{mn} - y^{m^3+n^3+mn}}{(xy)^{mn} - y^{m^2+n^2}}\text{; es notable:}$$

Resolución:

Si genera un CN se cumple:

$m + n = m\,.\,n$ ...(I)

Por n.º de términos:

$\dfrac{m^3 + n^3 + mn}{m^2 + n^2} = \dfrac{mn}{mn} = 1$

$m^3 + n^3 + mn = m^2 + n^2$

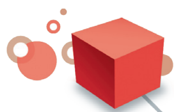
$m^3 + n^3 = m^2 - mn + n^2$

$(m + n)(m^2 - mn + n^2) = (m^2 - mn + n^2)$

$\Rightarrow m + n = 1$

De (I):

$mn = m + n = 1$





UNIDAD 2

FACTORIZACIÓN

CONCEPTO

Es la transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.

Considera las siguientes propiedades

I. El número máximo de factores primos que tiene un polinomio está dado por su grado.
Ejemplo: $x^3 + 5x^2 - 10x - 7$: a lo más tiene 3 factores primos.

II. Los polinomios lineales (primer grado) necesariamente son factores primos.

III. Los factores primos podrán ser:
Simples: si su exponente es la unidad.
Múltiples: si su exponente es mayor que la unidad.

Ejemplo:
El polinomio: $P(x) = (x^4 - 1)(x^2 + 3x + 1)(x + 7)^7$ aún no está factorizado, ya que falta descomponer: $x^4 - 1$

Luego: $P(x) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)(x^2 + 3x + 1)(x + 7)^7$

Observaciones:
$x^2 + 1$, $x + 1$, $x - 1$, $x^2 + 3x + 1$ } Son factores primos simples.
$x + 7$ } Es un factor primo múltiple (su multiplicidad es siete, es decir, se repite siete veces).

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

A) Factor común (agrupación de términos)

Se aplica cuando en todos los términos del polinomio se repite el mismo factor, al que se le denomina factor común. Para factorizar, se extrae a cada término del polinomio el factor común, (si este tuviese diferentes exponentes, se elige el de menor exponente).
El factor común puede ser un monomio o un polinomio.

Ejemplos:

1. Factoriza: $\underbrace{x^3y + x^3z^2 + x^3y^3}$, se extrae: $x^3 \rightarrow \underbrace{x^3(y + z^2 + y^3)}$

Factor común monomio x^3 — Polinomio factorizado

2. Factoriza: $\underbrace{m^3n^5 + m^7p + m^9q}$, se extrae: $m^3 \rightarrow \underbrace{m^3(n^5 + m^4p + m^6q)}$

Factor común monomio $m^{③}$ → menor exponente — Polinomio factorizado

3. Factoriza: $m^2x + z^7n + m^2n + z^7x$

Agrupando:
$(m^2x + z^7x) + (z^7n + m^2n)$
$x(m^2 + z^7) + n(z^7 + m^2)$

El factor común polinomio es: $m^2 + z^7$
$\therefore \underbrace{(m^2 + z^7)(x + n)}$
Polinomio factorizado

B) Identidades

Consiste en utilizar las identidades algebraicas (productos notables) en forma inversa, es decir, del producto pasar a los factores. Los que se emplean con más frecuencia son:

1. Diferencia de cuadrados

$$x^{2m} - y^{2n} = (x^m - y^n)(x^m + y^n)$$

Ejemplo:
$x^8 - y^6 = (x^4)^2 - (y^3)^2 = (x^4 + y^3)(x^4 - y^3)$

2. Suma de cubos

$$(x^m + y^n)(x^{2m} - x^my^n + y^{2n}) = x^{3m} + y^{3n}$$

Ejemplo:
$8a^6 + b^9 = (2a^2)^3 + (b^3)^3 = (2a^2 + b^3)(4a^4 - 2a^2b^3 + b^6)$

Atención

Veamos los siguientes conceptos:

- **Factor o divisor algebraico de un polinomio**
  Es aquel polinomio no constante que divide en forma exacta a un polinomio.
  Así: $P(a; b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
  $\Rightarrow$ $a + b$: es factor o divisor de $P(a; b)$
  $a - b$: es factor o divisor de $P(a; b)$

- **Factor primo**
  Es aquel polinomio que solo admite dos divisores (factores):
  La unidad y la misma expresión.
  Veamos:
  * $x^2 - y^2$: no es primo, se puede descomponer:
  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
  * $x^2 + y^2$: sí es primo:
  $x^2 + y^2 \Rightarrow 1; x^2 + y^2$

- **Factor compuesto**
  Es aquel que resulta de la combinación de los factores primos.

  $(3x - 1)(x + 1)$ { $3x - 1$; $x + 1$; $(3x - 1)(x + 1)$; 1 } Admite más de 2 divisores

  1: polinomio de grado cero
  $3x - 1$: factor primo
  $x + 1$: factor primo
  $(3x - 1)(x + 1)$: factor compuesto



Nota

A menos que se indique lo contrario, cada factorización debe realizarse hasta obtener factores primos en Q. Cada uno de ellos con coeficientes enteros. Esto se define como factorización en Q.



3. Trinomio cuadrado perfecto (tcp)

$$x^{2m} \pm 2x^my^n + y^{2n} = (x^m \pm y^n)^2$$

Ejemplo:

$49x^{18} - 42x^9y^2 + 9y^4 =$

$(7x^9)^2 - 2(7x^9)(3y^2) + (3y^2)^2 = (7x^9 - 3y^2)^2$

4. Diferencia de cubos

$$(x^m - y^n)(x^{2m} + x^my^n + y^{2n}) = x^{3m} - y^{3n}$$

Ejemplo:

$7^{300}x^9 - 7^{-300}y^6 = (7^{100}x^3)^3 - (7^{-100}y^2)^3 =$

$(7^{100}x^3 - 7^{-100}y^2)(7^{200}x^6 + x^3y^2 + 7^{-200}y^4)$

C) Aspa simple

Se emplea para factorizar trinomios que se adecúan a la siguiente forma:

$F(x) = Mx^{2n} \pm Nx^n \pm P$ $\quad$ $G(x; y) = Mx^{2m} \pm Nx^my^n \pm Py^{2n}$ $\quad$ M, N, P $\neq 0$; $\{m; n\} \in \mathbb{Z}^+$

Procedimiento:

- Ordenar el trinomio y descomponer cada uno de los términos extremos en un producto de factores.
- Estos factores se multiplican en aspa y se debe cumplir que la suma de los productos sea igual al término central.
- Al cumplirse lo anterior, los factores se toman en forma horizontal.

$G(x; y) = Mx^{2m} + Nx^my^n + Py^{2n}$

$M_1x^m \quad P_1y^n$

$M_2x^m \quad P_2y^n$ $\quad \} M_1P_2x^my^n + M_2P_1x^my^n = Nx^my^n$

$\therefore G(x; y) = (M_1x^m + P_1y^n)(M_2x^m + P_2y^n)$

Recuerda

Mx^{2m}; Py^{2n}: son llamados términos fijos



Ejemplo:

Factoriza: $K(x) = (2x^2 + 7)^2 - x(2x^2 + 7) - 6x^2$

Resolución: $K(x) = (2x^2 + 7)^2 - x(2x^2 + 7) - 6x^2$

$2x^2 + 7 \quad 2x \qquad 2x(2x^2 + 7)$

$2x^2 + 7 \quad -3x \qquad -3x(2x^2 + 7)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad -x(2x^2 + 7)$

$\therefore K(x) = (2x^2 + 2x + 7)(2x^2 - 3x + 7)$

D) Aspa doble

Empleado para factorizar polinomios transformables de la siguiente forma:

$$E(x; y) = Gx^{2m} + Hx^my^n + Iy^{2n} + Jx^m + Ky^n + L; \quad \{m; n\} \in \mathbb{Z}^+$$

Procedimiento:

- Se trazan dos aspas simples entre los términos: Gx^{2m} y Iy^{2n} ; Iy^{2n} y L comprobando, respectivamente con los términos: Hx^my^n y Ky^n.
- Se traza un aspa grande entre los extremos: Gx^{2m} y L comprobando también con el término: Jx^m
- Se toman los factores en forma horizontal.

Recuerda

En este método del aspa doble, si falta algún término, debemos completar con ceros.



Ejemplo:

Factoriza: $S(x; y) = 19x^2 + 6x^4 - 7y^3 - y^6 + 8 - x^2y^3$

Resolución:

Según el procedimiento:

$S(x; y) = 6x^4 - x^2y^3 - y^6 + 19x^2 - 7y^3 + 8$

$3x^2 \quad y^3 \quad 8$

(1) (3) (2)

$2x^2 \quad -y^3 \quad 1$

Aspa:

(1): $2x^2y^3 - 3x^2y^3 = -x^2y^3$

(2): $y^3 - 8y^3 = -7y^3$ $\qquad \therefore S(x; y) = (3x^2 + y^3 + 8)(2x^2 - y^3 + 1)$

(3): $3x^2 + 16x^2 = 19x^2$



E) Aspa doble especial

Generalmente, se aplica para la factorización de polinomios de 4.° grado de la forma:

$$F(x) = Gx^{4n} + Hx^{3n} + Ix^{2n} + Jx^{n} + K \quad ; \; n \in \mathbb{Z}^{+}$$

Procedimiento:

- Se descomponen Gx^{4n} y K, luego se calcula la suma del producto en aspa.
- La suma obtenida se resta de Ix^{2n}.
- La diferencia que resulta se descompone en dos factores para comprobarlos con Hx^{3n} y Jx^{n}.

Ejemplo:

Factoriza: $M(x) = 15x^{20} - 16x^{15} - 6x^{10} + 9x^{5} - 2$

Resolución: $M(x) = 15x^{20} - 16x^{15} - 6x^{10} + 9x^{5} - 2$

$$\begin{array}{ccccc} 5x^{10} & & -7x^{5} & & +2 \\ & (2) & (1) & (3) & \\ 3x^{10} & & x^{5} & & -1 \end{array}$$

Verificamos:

(1): $6x^{10} - 5x^{10} = x^{10} \Rightarrow$ falta: $-7x^{10} = (-7x^{5})(x^{5})$
$(7x^{5})(-x^{5})$

(2): $-21x^{15} + 5x^{15} = -16x^{15}$

(3): $2x^{5} + 7x^{5} = 9x^{5}$

$M(x) = (5x^{10} - 7x^{5} + 2)(3x^{10} + x^{5} - 1)$

$$\begin{array}{cc} 5x^{5} & -2 \\ x^{5} & -1 \end{array}$$

$M(x) = (5x^{5} - 2)(x^{5} - 1)(3x^{10} + x^{5} - 1)$

$\therefore \; M(x) = (5x^{5} - 2)(x - 1)(x^{4} + x^{3} + x^{2} + x + 1)(3x^{10} + x^{5} - 1)$

F) Divisores binomios (evaluación binómica)

Se aplica a polinomios de cualquier grado, generalmente con una sola variable, siempre que tengan por lo menos un factor lineal (primer grado: $ax \pm b$)

Por el teorema del resto consideramos:

$$\text{Si: } A(x) \div (x - a) \Rightarrow R = A(a) = 0 \Rightarrow (x - a) \text{ es un factor o divisor de } A(x)$$

Posibles ceros racionales (PCR)

Estos se determinarán según el caso general:

$$PCR = \pm\left\{\frac{\text{Divisores del término independiente}}{\text{Divisores del coeficiente principal}}\right\}$$

Reglas:

R1: calcula los PCR.

R2: comprueba si alguno anula al polinomio, luego deducir el factor que anula a dicho polinomio: "a" es cero $\Rightarrow A(a) = 0 \Rightarrow (x - a)$ es un factor o divisor.

Si se anula para:

$x = 7 \Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow (x - 7)$ es un factor o divisor

$x = -9 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 9)$ es un factor o divisor

$x = -\frac{3}{7} \Rightarrow 7x + 3 = 0 \Rightarrow (7x + 3)$ es un factor o divisor

R3: al polinomio dado se le divide entre el factor o factores binomios obtenidos en la R2, el cociente de esta división por Ruffini es el otro factor del polinomio.

Ejemplo:

Factoriza: $M(n) = 2n^{3} + n^{2} - 7n - 6$

Resolución:

R1: $PCR = \pm\left\{\frac{1, 2, 3, 6}{1, 2}\right\} = \left\{\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm 2; \pm 3; \pm\frac{3}{2}; \pm 6\right\}$

Recuerda

En el método del aspa doble especial, si faltase algún término, este se completará con ceros.



Atención

Se denominan CEROS DE UN POLINOMIO a los valores de la variable que anulan al polinomio.

Así, en el polinomio:

$B(x) = -x^{3} - 7x^{2} - 13x - 7$

Si reemplazamos: $x = -1$

$B(-1) = -(-1)^{3} - 7(-1)^{2} - 13(-1) - 7$
$= +1 - 7 + 13 - 7 = 0$

Luego, afirmamos:

"–1" es un CERO del polinomio B(x).



Recuerda

Aquel coeficiente de la variable con MAYOR EXPONENTE es denominado: COEFICIENTE PRINCIPAL.

Veamos: mayor exponente

$R(n) = 3 - 7x^{3} + 2x - \frac{1}{2}x^{4} + 20x^{10}$

Coeficiente principal: 20



Observación

Procura encontrar los ceros del polinomio de manera que quede el cociente de 4.° grado o en el mejor de los casos de 2.° grado; que será más fácil factorizarlo por aspa simple.



R2: para: $n = -\frac{3}{2}$: $M\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(-\frac{3}{2}\right) - 6 = 0$ (cero)

Luego, un factor es: $(2n + 3)$

(El cociente que se obtendría sería de 2.° grado; con la posibilidad de factorizarlo por aspa simple)

R3: por Ruffini se obtiene el otro factor:

$2n + 3 = 0$	2	1	−7	−6
$n = -\frac{3}{2}$		−3	+3	+6
: 2	2	−2	−4	0
	1	−1	−2	

Cociente: 2.° grado

$\Rightarrow M(n) = (2n + 3)(n^2 - n - 2)$

n ⟍⟋ −2

n ⟋⟍ +1

$\therefore M(n) = (2n + 3)(n - 2)(n + 1)$

G) Artificios de cálculo

1. Cambio de variable

Si dos o más términos se repiten constantemente es recomendable hacer un cambio de variable que permitirá transformar una expresión aparentemente compleja en otra más simple.

Ejemplo:

Factoriza: $L(x; y) = 6(x^2 + y^3 + 1)^2 - 4(x^2 + y^3 + 1) - 2$

Resolución:

Buscando la expresión: $x^2 + y^3 + 1$ que se repite constantemente:

$$L(x; y) = 6(\underline{\underline{x^2 + y^3 + 1}})^2 - 4(\underline{\underline{x^2 + y^3 + 1}}) - 2$$

- Hacemos el cambio de variable: $t = x^2 + y^3 + 1$

  $L(t) = 6t^2 - 4t - 2 = 2(3t^2 - 2t - 1)$

- Factorizando por aspa simple:

  $L(t) = 2(3t^2 - 2t - 1) = 2(3t + 1)(t - 1)$

  3t ⟍⟋ +1

  t ⟋⟍ −1

- Reemplazamos: $x^2 + y^3 + 1 = t \Rightarrow L(x; y) = 2[3(\underline{\underline{x^2 + y^3 + 1}})+1]\ (\underline{\underline{x^2 + y^3 + 1}} - 1)$

  $\therefore\ L(x; y) = 2(3x^2 + 3y^3 + 4)(x^2 + y^3)$

Atención

Este método de los ARTIFICIOS DE CÁLCULO se aplica cuando los métodos anteriores no son fáciles de aplicar.



2. Reducción a diferencia de cuadrados (quita y pon)

Si aparecen exponentes pares, buscar un tcp.

Ejemplo:

Factoriza: $B(a; y) = a^4 + 4y^4$

Resolución:

Tenemos: $(a^2)^2 + (2y^2)^2$; para transformarlo en un tcp, necesitamos:

$2(a^2)(2y^2)$, entonces quitamos y ponemos: $4a^2y^2$

$$B(a; y) = a^4 + 4a^2y^2 + 4y^4 - 4a^2y^2 = (a^2 + 2y^2)^2 - (2ay)^2$$

$\therefore\ B(a; y) = (a^2 + 2y^2 + 2ay)(a^2 + 2y^2 - 2ay)$

Observación

- El hecho de formar un trinomio cuadrado perfecto (tcp) trae como consecuencia el de formar una diferencia de cuadrados.
- Es necesario reconocer que $x^2 \pm x + 1$ son componentes de una suma o diferencia de cubos:

$$x^3 \pm 1 = (x \pm 1)(x^2 \pm x + 1)$$



3. Sumas y restas especiales

Si aparecen exponentes impares, se procura formar una suma o diferencia de cubos:

Ejemplo:

Factoriza: $Z(x) = x^5 + x + 1$

Resolución:

Sumamos y restamos todas las potencias de **x** que faltan:

$Z(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

Extraemos: $x^2 + x + 1$

$\therefore\ Z(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Problemas resueltos

1 Factoriza: $P(x) = x^6 + 8x^2 - 1$

Resolución:

$P(x) = x^6 + 8x^2 - 1$, dando forma:

$P(x) = x^6 + 4x^2 + 4x^2 - 1$

Sumamos y restamos: $4x^4$

$P(x) = \underbrace{x^6 + 4x^4 + 4x^2} - \underbrace{4x^4 + 4x^2 - 1}$

$P(x) = (x^3 + 2x)^2 - (2x^2 - 1)^2$

Luego:

$P(x) = (x^3 + 2x^2 + 2x - 1)(x^3 - 2x^2 + 2x + 1)$

2 Factoriza:

$x^4 + x^2 + 1$

Resolución:

Restamos y sumamos el término x:

$x^4 - x + x + x^2 + 1$

$= \underbrace{x^4 - x} + x^2 + x + 1$

$= x\underbrace{(x^3 - 1)} + x^2 + x + 1$

$= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x(x - 1) + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\therefore\ x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

3 Factoriza:

$P(x) = x(x + 1)(x^3 - 7) - 6$

e indica el número de factores primos.

Resolución:

$P(x) = x(x + 1)(x^3 - 7) - 6$

Operando: $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^2 - 7x - 6$

Factorizando por divisores binómicos:

	1	1	0	–7	–7	–6
2		2	6	12	10	6
	1	3	6	5	3	0

$\Rightarrow P(x) = (x - 2)(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3)$

$x^2 \quad +2x \quad +3 = 3x^2$

$x^2 \quad +x \quad +1 = x^2$

$4x^2$

Falta: $2x^2 = (+2x)(+x)$

$\Rightarrow\ P(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 3)$

$\therefore\ P(x) = \underbrace{(x - 2)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 3)}_{\text{Tiene 3 factores primos}}$

4 Factoriza:

$F(x) = (x^2 + x + 1)^2 - 16x(x + 1) + 23$

e indica la suma de los factores primos.

Resolución:

$F(x) = (x^2 + x + 1)^2 - 16x(x + 1) + 23$

$= (x^2 + x + 1)^2 - 16(x^2 + x) - 16 + 16 + 23$

$= (x^2 + x + 1)^2 - 16(x^2 + x + 1) + 39$

$(x^2 + x + 1) \quad -13$

$(x^2 + x + 1) \quad -3$

$= (x^2 + x - 12)(x^2 + x - 2)$

$x \quad 4 \quad x \quad 2$

$x \quad -3 \quad x \quad -1$

$= (x + 4)(x - 3)(x + 2)(x - 1)$

Luego, la suma de los factores primos es: $4x + 2$

5 Factoriza:

$F(x; y) = (x + y)^4 - 5xy(x + y)^2 + 6x^2y^2$

e indica el mayor factor primo.

Resolución:

$F(x; y) = (x + y)^4 - 5xy(x + y)^2 + 6x^2y^2$

$= 6(xy)^2 - 5xy(x + y)^2 + (x + y)^4$

$3xy \quad -(x + y)^2$

$2xy \quad -(x + y)^2$

$= [3xy - (x + y)^2][2xy - (x + y)^2]$

$= (3xy - x^2 - y^2 - 2xy)(2xy - x^2 - y^2 - 2xy)$

$= (xy - x^2 - y^2)(-x^2 - y^2)$

$= (x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)$

Luego, el mayor factor primo es: $x^2 + y^2$

6 Factoriza:

$N(x) = x^4 + 6x^2 + 25$

Resolución:

Formamos un trinomio cuadrado perfecto (sumamos y restamos $4x^2$):

$N(x) = (x^2)^2 + 5^2 + 6x^2 + 4x^2 - 4x^2$

$N(x) = (x^2)^2 + 10x^2 + 5^2 - (2x)^2$

$N(x) = (x^2 + 5)^2 - (2x)^2$ (Diferencia de cuadrados)

$N(x) = (x^2 + 5 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$

Ordenando:

$N(x) = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 5)$

7 Luego de factorizar, indica el número de factores primos lineales de:

$F(a; b; c) = (a - b)(a + b)^2 + (b - c)(b + c)^2 + (c - a)(c + a)^2$

Resolución:

$F(a; b; c) = (a - b)(a + b)^2 + (b - c)(b + c)^2 + (c - a)(c + a)^2$

$= \underbrace{(a - b)(a^2 + ab + b^2 + ab)}_{a^3 - b^3} + \underbrace{(b - c)(b^2 + bc + c^2 + bc)}_{b^3 - c^3}$

$+ \underbrace{(c - a)(c^2 + ac + a^2 + ac)}_{c^3 - a^3}$

$= a^3 - b^3 + (a - b)ab + b^3 - c^3 + (b - c)bc + c^3 - a^3 + (c - a)ac$

$= (a - b)ab + (b - c)bc + (c - a)ac$

$= a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c$

$= b(a^2 - c^2) - b^2(a - c) - ac(a - c)$

$= (a - c)[b(a + c) - b^2 - ac]$

$= (a - c)[ab + bc - b^2 - ac]$

$= (a - c)[b(a - b) - c(a - b)]$

$= (a - c)(a - b)(b - c)$

$\therefore$ Entonces, hay tres factores primos lineales.

8 Suma los factores primos, luego de factorizar:

$R(a; b; c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2(a + b - c + bc)$

Resolución:

$R(a; b; c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2(a + b - c + bc)$

$= a^2 - b^2 - c^2 + 2a + 2b - 2c + 2bc$

Agrupamos:

$= a^2 + 2a - (b^2 + c^2 - 2bc - 2(b - c))$

$= a^2 + 2a - [(b - c)^2 - 2(b - c)]$

$= \underbrace{a^2 + 2a + 1}_{T.C.P} - \underbrace{[(b - c)^2 - 2(b - c) + 1]}_{T.C.P}$

$= (a + 1)^2 - (b - c - 1)^2$

Por diferencia de cuadrados:

$R(a; b; c) = (a + 1 + b - c - 1)(a + 1 - b + c + 1)$

$= (a + b - c)(a - b + c + 2)$

$\therefore$ Suma de factores: $2a + 2 = 2(a + 1)$

9 Factoriza:

$4[ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)]2 + [(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) - 4abxy]^2$

Resolución:

Sea: $ab = m$ $\quad x^2 - y^2 = n$

$xy = r$ $\quad a^2 - b^2 = p$

$\Rightarrow$ La expresión quedaría: $4(mn + rp)^2 + (pn - 4mr)^2$

Operamos: $4m^2n^2 + 8mnrp + 4r^2p^2 + n^2p^2 - 8mnrp + 16m^2r^2$

$\Rightarrow$ Agrupando convenientemente: $n^2(4m^2 + p^2) + 4r^2(4m^2 + p^2)$

Luego: $(4m^2 + p^2)(n^2 + 4r^2)$

Reemplazamos:

$= [4a^2b^2 + (a^2 - b^2)^2][(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2]$

$= (a^4 + b^4 + 2a^2b^2)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = (a^2 + b^2)^2 . (x^2 + y^2)^2$

10 Factoriza:

$E = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2 - x^5$

Resolución:

Observamos que la expresión dentro del paréntesis proviene del cociente notable: $\dfrac{1 - x^6}{1 - x}$

$\Rightarrow E = \left(\dfrac{1 - x^6}{1 - x}\right) = x^5$

$E = \dfrac{(1 - x^6)^2}{(1 - x)^2} - x^5 = \dfrac{(1 - x^6)^2 - x^5(1 - x)^2}{(1 - x)^2}$

Efectuando: $\dfrac{1 - 2x^6 + x^{12} - x^5 + 2x^6 - x^7}{(1 - x)^2}$

Agrupando convenientemente: $\dfrac{(1 - x^5) - x^7(1 - x^5)}{(1 - x)^2}$

Factorizando: $E = \dfrac{(1 - x^5)(1 - x^7)}{(1 - x)^2} = \left(\dfrac{1 - x^5}{1 - x}\right)\left(\dfrac{1 - x^7}{1 - x}\right)$

Desarrollando por cocientes notables:

$E = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$

11 Al factorizar:

$P(x; y) = (x + y)^2 + 6x + 6y + 7(x + y + 3) + 19$

¿Cuál de los factores obtenidos posee mayor valor numérico para cualquier valor de **x** e **y**?

Resolución:

Ordenamos y agrupamos convenientemente:

$= \underbrace{(x + y)^2 + 2 . 3 . (x + y) + 3^2}_{T.C.P} + 7(x + y + 3) + 10$

$= (x + y + 3)^2 + 7(x + y + 3) + 10$

$(x + y + 3) \quad\quad +5$

$(x + y + 3) \quad\quad +2$

Por aspa simple

$\Rightarrow P(x; y) = (x + y + 8)(x + y + 5)$

$\therefore$ Para cualquier valor de **x** e **y**, el factor que toma mayor valor númerico es: $(x + y + 8)$



MCD Y MCM FRACCIONES ALGEBRAICAS

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor grado posible contenida como factor, un número entero de veces, en dichas expresiones.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de menor grado posible que contiene un número entero de veces, como factor a dichas expresiones.

Procedimiento a emplear para determinar el MCD y el MCM de dos o más expresiones algebraicas:

1. Factoriza las expresiones dadas.
2. El MCD estará formado por los factores comunes con su menor exponente.
3. El MCM se formará con los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos:

1. Halla el MCD y el MCM de: $6x^2y^7z^{10}$; $9x^7y^3z^5$

   $\text{MCD}(6x^2y^7z^{10}; 9x^7y^3z^5) = 3x^2y^3z^5$; $\text{MCM}(6x^2y^7z^{10}; 9x^7y^3z^5) = 18x^7y^7z^{10}$

2. Halla el MCD y el MCM de:

   $$M(x) = (2x + 1)^3(x - 7)^5(3x + 2)$$
   $$N(x) = (2x + 1)^2(x - 7)^6(x - 9)$$

   $\text{MCD}(M(x); N(x)) = (2x + 1)^2(x - 7)^5$; $\text{MCM}(M(x); N(x)) = (2x + 1)^3(x - 7)^6(3x + 2)(x - 9)$

Atención

A. El MCD de dos o más polinomios primos entre sí es la unidad y su MCM el producto de ellos.

B. Solo para dos polinomios se cumple:

$$AB = \text{MCD}(A; B) \times \text{MCM}(A; B)$$



FRACCIÓN ALGEBRAICA

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones algebraicas, en donde la expresión que representa al divisor es diferente de cero.

Ejemplos:

$$\frac{29m^3nb^2}{3mny}; \frac{5x^7 - b^2}{3x + 10bn}; \frac{a^3 + b}{(x - y)^3 + abcx}; \frac{1}{x}$$

Clasificación

I. Fracciones propias

El numerador tiene menor grado que el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x^{3} + x^2 + 2}{x^{7} + 7x - 10}; \frac{a^1b^1 + 3b^{2}}{a^{3}b^{2} + 7b^{3}}; \frac{2x^1 + 7}{x^{10} + 1}$$

II. Fracciones impropias

El numerador tiene grado mayor o igual que el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x^{5} + x + 1}{x^{3} + x + 1}; \frac{a^{9} + 3a - 1}{a^{7} + a^2 - 1}; \frac{x^{2} + 2x - 1}{x^{2} - 2x - 1}$$

III. Fracciones homogéneas

Presentan iguales denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{5}{xy - 1}; \frac{x^7 + 2x + 1}{xy - 1}; \frac{35y + x^2}{xy - 1}$$

Atención

- De la fracción: $\frac{A(x)}{B(x)}$, a la expresión situada encima de la línea, se le llama numerador y a la que está debajo se le llama denominador.
- $\frac{x^3 - x + 1}{4}$ NO es una fracción algebraica. El denominador por lo menos debe tener una variable.



IV. Fracciones heterogéneas

Presentan diferentes denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{(2x+1)}{3x-1};\ \frac{x^2-1+x}{3x^2-1};\ \frac{x^3-2x-3-1}{2x+1}$$

V. Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si toman los mismos valores numéricos para todos los valores admisibles de sus variables.

Ejemplo:

$$\frac{x-1}{x+1};\ \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

VI. Fracción compleja o compuesta

Cuando al menos uno de sus términos es una expresión fraccionaria.

Ejemplos:

$$\frac{x^2}{10+\frac{3}{x}};\ \frac{x-\frac{1}{x-1}}{x+1};\ \frac{\frac{x+1}{2x}}{\frac{x-1}{x-3}}$$

VII. Fracción de valor constante

Cuando asume el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores asignados de sus variables.

Si la fracción: $\frac{Ax^P+By^q+C}{Mx^P+Ny^q+P}$

adopta un valor constante, se cumple que: $\frac{A}{M}=\frac{B}{N}=\frac{C}{P}$

VIII. Fracciones irreductibles

Son aquellas en donde las componentes de la fracción expresada como factores son primos entre sí.

Ejemplos:

$$\frac{x+y^2}{x+2};\ \frac{a^3+3b^2}{a^2-b};\ \frac{y-3}{2x+1};\ \frac{x-1}{x+9}$$

Atención

- Para toda fracción se observan 3 signos (del numerador, denominador y de la fracción propiamente dicha).
  Sea:

$$F = \oplus\frac{\oplus A_{(x)}}{\ominus B_{(x)}}$$

(1: signo del numerador; 2: signo del denominador; 3: signo de la fracción)

- Una fracción equivalente se obtiene también alterando cualquier par de sus signos.

$$-\frac{2x-3}{x-7} = +\frac{3-2x}{x-7} = +\frac{2x-3}{7-x}$$

(I) (II)

(I) y (II) son equivalentes respecto a la fracción original.



Operaciones con fracciones

1. Para sumar o restar fracciones es necesario hacerlas homogéneas.

Ejemplo:

$$\frac{x+9}{x-10}-\frac{x+10}{x+11}=\frac{(x+9)(x+11)-(x^2-100)}{(x-10)(x+11)}=\frac{\cancel{x^2}+20x+99-\cancel{x^2}+100}{(x-10)(x+11)}=\frac{20x+199}{(x-10)(x+11)}$$

2. Para multiplicar fracciones, se multiplican denominadores y numeradores entre sí.

Ejemplo:

$$\left(\frac{x+7}{x-3}\right)\left(\frac{x+3}{x-1}\right)=\frac{x^2+10x+21}{x^2-4x+3}$$

3. Para dividir fracciones, se invierte la fracción que hace de divisor. Luego multiplicamos numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo:

$$\left(\frac{x-10}{x+1}\right)\div\left(\frac{x-9}{x+7}\right)=\left(\frac{x-10}{x+1}\right)\left(\frac{x+7}{x-9}\right)=\frac{x^2-3x-70}{x^2-8x-9}$$

También la división se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{x-10}{x+1}}{\frac{x-9}{x+7}}=\frac{(x-10)(x+7)}{(x+1)(x-9)}=\frac{x^2-3x-70}{x^2-8x-9}$$

Recuerda

Operaciones con fracciones

- $\frac{a}{x}\pm\frac{b}{x}=\frac{a\pm b}{x}$
- $\frac{a}{x}\pm\frac{b}{y}=\frac{ay\pm bx}{xy}$
- $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}=\frac{ab}{xy}$
- $\frac{a}{x}\div\frac{b}{y}=\frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}}=\frac{ay}{bx}$





Simplificación de fracciones complejas

Aplicamos las reglas anteriores hasta que al final se multipliquen los extremos para obtener un nuevo numerador y un nuevo denominador.

Ejemplo:

Simplifica:

$$Z = \frac{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}}$$

- Operamos en el numerador y denominador de Z, luego simplificamos:

$$Z = \frac{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}} = \frac{\dfrac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}}{\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}} = \frac{\dfrac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}}{\dfrac{4xy}{(x+y)(x-y)}} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Atención

- Considera el siguiente criterio para transformar una fracción impropia a una propia:

$$\frac{x^2+8x-19}{x+9} = \frac{(x^2+8x-9)-10}{x+9}$$

$$= \frac{(x-1)(x+9)}{x+9} - \frac{10}{x+9}$$

$$\frac{x^2+8x-19}{x+9} = x-1-\frac{10}{x+9}$$



Descomposición de fracciones en suma de fracciones parciales

Esto es el proceso inverso a una suma o diferencia de fracciones. Lo que haremos será partir de una fracción racional y transformarla a una suma de fracciones simples o parciales.

Tomemos en cuenta las siguientes consideraciones:

I. La fracción debe ser propia, caso contrario dividirla (puede ser por Horner) de modo que tengamos un polinomio entero más una fracción propia.
II. Simplificar previamente la fracción (hacerla irreductible).
III. El polinomio del denominador debe ser factorizado.

Casos que se presentan

Caso I:

Cuando el denominador presenta factores de primer grado NO repetidos de la forma: $(x \pm a)$

Se considerará tantas fracciones parciales de la forma: $\dfrac{M}{x \pm a}$ como factores de primer grado existan:

$$\frac{N(x)}{(x\pm a)(x\pm b)} = \frac{A}{x\pm a} + \frac{B}{x\pm b}$$

Caso II:

El denominador presenta factores de primer grado repetidos de la forma: $(x \pm a)^n$

En este caso asumir "n" fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\frac{N(x)}{(x\pm a)^3} = \frac{A}{x\pm a} + \frac{B}{(x\pm a)^2} + \frac{C}{(x\pm a)^3}$$

3.er grado ⇒ 3 fracciones parciales

Recuerda

Para la descomposición de fracciones en suma de fracciones parciales, empleamos la propiedad de polinomios idénticos:

"Dos polinomios idénticos tienen el mismo valor numérico para cada sistema de valores asignados a sus variables".



Ejemplo:

Expresa como la suma de fracciones parciales: $\dfrac{9x^2-49x+54}{(x+1)(x-3)^2}$

Resolución:

- La fracción cumple con las consideraciones establecidas; presenta un factor de primer grado no repetido y otro que se repite dos veces, luego:

$$\frac{9x^2-49x+54}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

- De donde:

$$\frac{9x^2-49x+54}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

- Cancelando denominadores:

$$9x^2-49x+54 = A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)$$

Para $x=3$: $-12 = 4C \Rightarrow C = -3$
Para $x=-1$: $112 = 16A \Rightarrow A = 7$
Para $x=0$: $54 = 9A - 3B + C \Rightarrow B = 2$

Finalmente: $\dfrac{9x^2-49x+54}{(x+1)(x-3)^2} = \dfrac{7}{x+1} + \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{(x-3)^2}$

Problemas resueltos

1 Encuentra el MCD de los polinomios:

$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$Q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

$R(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Resolución:

$P(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$

$\quad = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$

$Q(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

$R(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$

$MCD(P(x); Q(x); R(x)) = (x - 2)(x + 1)$

$\quad = x^2 - x - 2$

2 Halla el grado absoluto del MCM de los polinomios:

$A(x; y) = x^5 - xy^4$; $B(x; y) = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

Resolución:

El polinomio A puede factorizarse:

$A(x; y) = x(x^4 - y^4)$ (Diferencia de cuadrados)

$A(x; y) = x(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

$A(x; y) = x(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$

El polinomio B no admite otros factores:

$B(x; y) = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

Entonces el MCM de A y B será:

$MCM(A; B) = x(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(x^4 + y^4)$

El grado absoluto de este MCM será la suma de los grados absolutos de cada factor:

$GA = 1 + 2 + 1 + 1 + 4 = 9$

3 Halla el MCD de los polinomios:

$P(x) = a^5 - a^4x - ax^4 + x^5$; $Q(x) = a^3x - a^2x^2 - ax^3 + x^4$

Resolución:

Factorizamos P(x) y Q(x):

- $P(x) = a(a^4 - x^4) - x(a^4 - x^4)$

  $P(x) = (a^4 - x^4)(a - x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)(a - x)$

  $P(x) = (a^2 + x^2)(a + x)(a - x)(a - x)$

$\Rightarrow P(x) = (a^2 + x^2)(a + x)(a - x)^2$

- $Q(x) = ax(a^2 - x^2) - x^2(a^2 - x^2) = (a^2 - x^2)(ax - x^2)$

  $Q(x) = (a + x)(a - x)x(a - x)$

$\Rightarrow Q(x) = x(a + x)(a - x)^2$

Los factores comunes con su menor exponente son:

$(a + x)$ y $(a - x)^2$

$\therefore MCD(P; Q) = (a + x)(a - x)^2$

4 Calcula (a – b), si:

$$\frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2};\ x \neq 1; 2$$

Resolución:

Efectuamos el segundo miembro:

$$\frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a(x - 2) + b(x - 1)}{x^2 - 3x + 2}$$

$4x - 7 = (a + b)x - (2a + b)$

De donde: $a + b = 4$ ...(I)

$2a + b = 7$ ...(II)

De (I) y (II): $a = 3 \wedge b = 1$

Piden: $a - b = 3 - 1 = 2$

5 Simplifica:

$$R = \cfrac{\cfrac{m + 1 - \cfrac{6m + 12}{m + 2}}{m + 5}}{\cfrac{m - 4 + \cfrac{11m - 22}{m - 2}}{m + 7}}$$

Resolución:

$$R = \cfrac{\cfrac{m + 1 - \cfrac{6m + 12}{m + 2}}{m + 5}}{\cfrac{m - 4 + \cfrac{11m - 22}{m - 2}}{m + 7}} \Rightarrow R = \cfrac{\cfrac{\cfrac{m^2 + 3m + 2 - 6m - 12}{m + 2}}{m + 5}}{\cfrac{\cfrac{m^2 - 6m + 8 + 11m - 22}{m - 2}}{m + 7}}$$

$$R = \cfrac{\cfrac{\cfrac{m^2 - 3m - 10}{m + 2}}{m + 5}}{\cfrac{\cfrac{m^2 + 5m - 14}{m - 2}}{m + 7}} \Rightarrow R = \cfrac{\cfrac{\cfrac{(m + 2)(m - 5)}{m + 2}}{m + 5}}{\cfrac{\cfrac{(m + 7)(m - 2)}{m - 2}}{m + 7}}$$

$$R = \cfrac{\cfrac{m - 5}{m + 5}}{\cfrac{m + 7}{m + 7}} = \frac{m - 5}{m + 5}$$

6 Simplifica:

$$\cfrac{x - 1}{x + 2 - \cfrac{x^2 + 2}{x - \cfrac{x - 2}{x + 1}}}$$

Resolución:

$$= \cfrac{x - 1}{x + 2 - \cfrac{x^2 + 2}{\cfrac{x^2 + x - x + 2}{x + 1}}} = \cfrac{x - 1}{x + 2 - \cfrac{\cfrac{x^2 + 2}{1}}{\cfrac{x^2 + 2}{x + 1}}}$$

$$= \cfrac{x - 1}{x + 2 - \cfrac{(x^2 + 2)(x + 1)}{(x^2 + 2)}} = \frac{x - 1}{x + 2 - x - 1} = x - 1$$

POTENCIACIÓN

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Es el resultado que se obtiene de multiplicar todos los números enteros y positivos en forma consecutiva desde la unidad hasta el número dado.

Notaciones:

Se denotarán con los símbolos: $\underline{|\ \ }$, ! Tienen como significado: "Factorial de"

Ejemplos:

$\underline{|6} = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\underline{|9} = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\underline{|2x} = (2x)! = (2x) \cdot (2x-1) \cdot (2x-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

En general:

$\underline{|n} = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$; donde: $n \in \mathbb{Z}^+$; $n \geq \mathbb{Z}$

COFACTORIAL O SEMIFACTORIAL

Está definido como:

$$\underline{\underline{||n}} = n!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n & \text{(si "n" es par)} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n & \text{(si "n" es impar)} \end{cases}$$

Ejemplos:

1. $\underline{\underline{||7}} = 7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
2. $\underline{\underline{||6}} = 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6$
3. $\underline{\underline{||11}} = 11!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$

RELACIÓN ENTRE UN SEMIFACTORIAL Y EL FACTORIAL

I. Si n: impar

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (n-1)n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-1)} = \frac{n!}{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2)}_{\left(2^{\frac{n-1}{2}}\right)}\underbrace{\left(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)\right)}_{\underline{|\frac{n-1}{2}}}}$$

$$\underline{\underline{||n}} = \frac{\underline{|n}}{2^{\frac{n-1}{2}}\underline{|\frac{n-1}{2}}}$$

Donde: $n \in \mathbb{N}$ (impar)

II. Si n: par

$$\underline{\underline{||n}} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n = 2(1) \cdot 2(2) \cdot 2(3) \cdot \ldots 2\left(\frac{n}{2}\right) = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2)}_{\left(\frac{n}{2}\right)\text{veces}}\underbrace{\left(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{n}{2}\right)}_{\underline{|\frac{n}{2}}}$$

$$\underline{\underline{||n}} = 2^{\frac{n}{2}}\underline{|\frac{n}{2}}$$

Donde: $n \in \mathbb{N}$ (par)

Ejemplo:

Simplifica: $C = \dfrac{2^{2n}((4n)!)^2}{(8n)!!(4n-1)!!}$

Resolución:

$$C = \frac{2^{2n}((4n)!)^{2}}{2^{4n}(4n)!\dfrac{(4n-1)!}{2^{2n-1}(2n-1)!}} = \frac{2^{2n}2^{2n-1}(2n-1)!(4n)!}{2^{4n}(4n-1)!} = 2n(2n-1)! = (2n)!$$

Observación

1. Solo existen los factoriales de los números enteros y positivos.
   $\underbrace{(-50)!, \left(\frac{1}{3}\right)!, (\sqrt{2}-\pi)!}_{\text{no existen}}$
2. Por convención: $0! = 1$ y por definición: $1! = 1$
   De los cuales no se puede proceder:
   $0! = 1! \Rightarrow 0 = 1$ (absurdo)
3. Si: $m! = n! \Rightarrow m = n$
   $\forall\ m; n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$
4. $m! = m(m-1)!$
   $\forall\ m \geq 1, m \in \mathbb{N}$
5. Si: $x! = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \vee \\ x = 0 \end{cases}$



Observación

Para $n \in \mathbb{N}$, se cumple:
$n \times n! = (n+1)! - n!$



Atención

Resultados importantes:

1. $C_0^n = 1;\ n \in \mathbb{N}$
2. $C_n^n = 1;\ n \in \mathbb{N}$
3. $C_1^n = n;\ n \in \mathbb{N}$



NÚMERO COMBINATORIO

Se define como el número total de grupos que se pueden formar con "n" elementos tomados de "k" en "k", donde cada grupo debe diferenciarse de otro por lo menos en un elemento.

Se denota por: C_k^n; ${}^nC_k$; nCk
Se lee: combinaciones de "n" elementos tomados de "k" en k"

Forma matemática:

$$C_k^n = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}^{\text{k factores}}}{\underbrace{1.2.3...k}_{\text{k factores}}} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

donde: $n;\ k \in \mathbb{N}$
$n \geq k$

Propiedades de los números combinatorios

I. Suma de números combinatorios

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

II. Propiedad complementaria

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

III. Degradación de índices

Ambos índices: $C_k^n = \frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}$

Índice superior: $C_k^n = \frac{n}{n-k}C_k^{n-1}$

Índice inferior: $C_k^n = \frac{n-k+1}{k}C_{k-1}^n$

IV. Igualdad de números combinatorios

Si: $C_p^n = C_q^n \Rightarrow p = q \vee p + q = n$

Recuerda

El aporte de Newton al desarrollo de $(x + a)^n$ fue cuando se consideró **n** negativo y/o fraccionario.



BINOMIO DE NEWTON

Desarrollo del binomio de Newton con exponente natural ($n \in \mathbb{N}$).
Genéricamente:

$$(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + ... + C_n^n a^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k}a^k$$

Ejemplo:

Determina el desarrollo de: $(x + 4)^5$

$$(x+4)^5 = C_0^5x^5 + C_1^5x^4(4) + C_2^5x^3(4)^2 + C_3^5x^2(4)^3 + C_4^5x(4)^4 + C_5^5(4)^5$$

$$= x^5 + 20x^4 + 160x^3 + 640x^2 + 1280x + 1024$$

Cálculo del término general

I. Contado de izquierda a derecha

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k}a^k$$

II. Contado de derecha a izquierda

$$t_{k+1} = C_k^n a^{n-k}x^k$$

Ejemplo:

En $(2x^3 - a^4)^{15}$, halla el término duodécimo.

$$t_{12} = t_{11+1} = C_{11}^{15}(2x^3)^{15-11}(-a^4)^{11} = -16C_{11}^{15}x^{12}a^{44}$$



Suma de coeficientes

Dado: $P(x) = (x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} a^k$

La suma de coeficientes de $P(x)$ es: $P(1) = (1 + a)^n = C_0^n + aC_1^n + a^2 C_2^n + ... + a^n C_n^n$

$$\text{Cuando: } a = 1: C_0^n + C_1^n + C_2^n + ... + C_n^n = 2^n$$

$$\text{Si "n" es par: } \begin{array}{l} C_1^n + C_3^n + C_5^n + ... + C_{n-1}^n = 2^{n-1} \\ C_0^n + C_2^n + C_4^n + ... + C_n^n = 2^{n-1} \end{array}$$

De la misma forma se cumple cuando "n" es impar.

Posición del término central

I. Cuando n: par

El desarrollo del binomio $(x + a)^n$ tendrá un único término central solo cuando "n" es par; luego la posición que ocupa ese término es: $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$.

$$t_c = t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = C_{\frac{n}{2}}^n x^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}$$

Ejemplo:

$$(x^2 - 8y^3)^{10} \Rightarrow t_c = t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = t_6 = C_5^{10}(x^2)^5(-8y^3)^5 = -2^{15}C_5^{10}x^{10}y^{15}$$

II. Cuando n: impar

En este caso existen dos términos centrales, luego las posiciones que ocupan esos términos son: $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ y $\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$.

$$t_{\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} = C_{\frac{n-1}{2}}^n x^{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} \qquad t_{\left(\frac{n+1}{2}+1\right)} = C_{\frac{n+1}{2}}^n x^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}}$$

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTES NEGATIVOS Y/O FRACCIONARIOS ($n \notin \mathbb{N}$)

Coeficiente binómico

Se representa por: $\binom{n}{k}$ (notación de Ettingshansen); $n \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{Z}^+$

Se lee: coeficiente binómico de "n" sobre "k"

Siendo su desarrollo:

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}^{\text{k factores}}}{\underbrace{1.2.3....k}_{\text{k factores}}}$$

Ejemplos:

1. $\binom{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}-2)}{1.2.3}$

$= \frac{\sqrt{10}(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}-2)}{6}$

2. $\binom{-4}{3} = \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{1.2.3}$

$= \frac{(-4)(-5)(-6)}{6} = -\frac{4(5)(\cancel{6})}{\cancel{6}} = -20$

Observación

1. Sea el binomio: $(\gamma x + \varepsilon a)^n$
   $\Rightarrow$ n.° términos = n + 1
   donde: $n \in \mathbb{N}$
2. Asimismo; del binomio: $(\gamma x + \varepsilon a)^n$
   $\Sigma\text{coef.} = (\gamma + \varepsilon)^n$
   Para: $(x - 1)^n$
   $\Rightarrow \Sigma\text{coef.} = 0$
3. El desarrollo del binomio $(x + a)^n$, $n \in \mathbb{N}$ se caracteriza por ser completo y ordenado respecto a sus bases. Este desarrollo también es un polinomio homogéneo.
4. Signos de los términos de los desarrollos:
   $(x + a)^n = +, +, +, ... +$
   $(x - a)^n = +, -, +, -, ...$
   1.° 2.° 3.° 4.° ... términos
   Lugar par: $-$
   Lugar impar: $+$



Observación

Puedes hallar el coeficiente de un término cualquiera para $(x + a)^n$ en función al coeficiente anterior:

Coeficiente de t_k =

$$\frac{\left(\text{Coeficiente de } t_{k-1}\right)\left(\text{Exponente de x en } t_{k-1}\right)}{\left(\text{Exponente de a en } t_{k-1}\right) + 1}$$



Fórmula general:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \ldots\infty \text{ términos}$$

Donde: **n** es negativo y/o fraccionario ($n \in \mathbb{R}$): exponente del binomio
El término general se calcula con:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}a^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(k-1))}^{\text{k factores}}}{\underbrace{1.2.3\ldots k}_{\text{k factores}}} . x^{n-k}a^k \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo:

Desarrolla hasta el cuarto término:

$$(1-x)^{-2} = \binom{-2}{0}(1)^{-2} + \binom{-2}{1}1^{-3}(-x) + \binom{-2}{2}1^{-4}(-x)^2 + \binom{-2}{3}1^{-5}(-x)^3 + \ldots\infty$$

$$= 1 + 2x + \frac{(-2)(-3)}{1.2}.x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3}(-x^3) + \ldots\infty$$

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\infty$$

Observación

a) Si: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ se obtiene un número limitado de términos. Si: $n < 0$ y/o fraccionario se obtienen infinitos términos.

b) $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{1} = n$; $n \in \mathbb{R}$

c) Si se tiene $(x \pm a)^t$; $t \notin \mathbb{N}$, se recomienda expresarlo de la siguiente manera:

$x^t\left(1 \pm \frac{a}{x}\right)^t$ donde: $-1 < \frac{a}{x} < 1$

d) De tener: $(1 \pm x)^n$ y "x" es un valor pequeñísimo, se cumple:

$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$



Fórmula de Leibniz

Se emplea para desarrollar un polinomio de tres o más términos, elevado a un exponente natural.

$$(A + B + C + \ldots + X)^n = \sum_{\alpha;\beta;\ldots;\lambda} \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots\lambda!} A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta \ldots X^\lambda$$

Donde: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda \in \mathbb{N}$ siempre y cuando:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(A + B + C)^2$, usando la fórmula de leibniz.

Resolución:

Usando la fórmula: $(A+B+C)^2 = \sum_{\alpha;\beta;\gamma} \frac{2!}{\alpha!\beta!\gamma!} A^\alpha B^\beta C^\gamma$

Donde $\{\alpha;\beta;\gamma;\} \subset \mathbb{N}$, tal que: $\alpha + \beta + \gamma = 2$

Entonces:

α +	β +	γ = 2	
↓	↓	↓	
0	1	1	Todas las combinaciones posibles
0	0	2	
0	2	0	
1	1	0	
1	0	1	
2	0	0	



Atención

Las letras: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ recibirán todos los valores desde el 0 hasta **n**.

En la fórmula:

$$(A+B+C)^2 = \frac{2!}{0!.1!.1!}A^0B^1C^1 + \frac{2!}{0!.0!.2!}A^0B^0C^2 + \frac{2!}{0!.2!.0!}A^0B^2C^0 + \frac{2!}{1!.1!.0!}A^1B^1C^0 + \frac{2!}{1!.0!.1!}A^1B^0C^1 + \frac{2!}{2!.0!.0!}A^2B^0C^0$$

$$(A+B+C)^2 = 2BC + C^2 + B^2 + 2AB + 2AC + A^2$$

Empleando este método, se obtiene el desarrollo de un trinomio al cuadrado.

Nota

En general:

- $(a+b)! \neq a! + b!$
- $(a \times b)! \neq a! \times b!$
- $(a!)! \neq a!!$
- $\left(\frac{a}{b}\right)! \neq \frac{a!}{b!}$

Donde **a** y **b** son diferentes de 0 y 1.

Problemas resueltos

1 La suma de coeficientes de los cuatro primeros términos del desarrollo de $\frac{1}{x^3+1+3x(1+x)}$ es:

Resolución:

Nota:

Si **n** es fraccionario o negativo, el número de términos es ilimitado.

$$(x \pm a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

$$(1+x)^{-3} = C_0^{-3} + C_1^{-3}x + C_2^{-3}x^2 + C_3^{-3}x^3 + \dots$$

$$= 1 - 3x + \frac{(-3)(-4)}{1.2}x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

$$= 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \dots$$

Por lo tanto: La suma de coeficientes de los 4 primeros términos es: –6

2 Calcula: $(n+1)S$.

Siendo: $S = C_0^n + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} + \frac{C_3^n}{4} + \frac{C_4^n}{5} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$

Resolución:

$$(n+1)S = (n+1)C_0^n + (n+1)\frac{C_1^n}{2} + \dots + \frac{(n+1)C_n^n}{n+1}$$

$$(n+1)S = \frac{(n+1)}{1}C_0^n + \frac{(n+1)}{2}C_1^n + \dots + \frac{(n+1)}{n+1}C_n^n$$

$$(n+1)S = C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + \dots + C_{n+1}^{n+1}$$

$$(n+1)S = C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + \dots + C_{n+1}^{n+1} - C_0^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n+1)S = 2^{n+1} - C_0^{n+1}$$

$$\therefore (n+1)S = 2^{n+1} - 1$$

3 Determina el coeficiente del término de lugar $(k+1)$ en el desarrollo de: $(1+x)^{1/2}$

Resolución:

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}$$

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{2(k-1)-1}{2}\right)}{k!}$$

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{k-1}.1.3.5.7\dots[2(k-1)-1]}{2^k k!}$$

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{k-1}.1.3.5.7\dots[2(k-1)-1][2.4.6\dots2(k-1)]}{2^k k![2.4.6\dots2(k-1)]}$$

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{k-1}.1.2.3.4.5\dots2(k-1)}{2^k\ k!\ 2^{k-1}[1.2.3\dots(k-1)]}$$

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{k-1}[2(k-1)]!}{2^{2k-1}\ k!\ (k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}[2(k-1)]!}{2^{2k-1}k(k-1)!(k-1)!}$$

$$\therefore C_k^{\frac{1}{2}} = (-1)^{k-1}2^{1-2k}k^{-1}C_{k-1}^{2(k-1)}$$

4 Si el desarrollo de: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^n$ admite 495 términos; determina el número de términos que posee el desarrollo de: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{n/2}$

Resolución:

El número de términos del desarrollo:

$P(x_1; \dots; x_r) = (x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ es: C_n^{n+r-1}

En el problema: $C_n^{n+5-1} = 495 \Rightarrow C_n^{n+4} = 495$

$$C_n^{n+4} = 495 = C_4^{12}$$

$$\Rightarrow n = 8$$

Piden: $C_{n/2}^{n/2+4-1} = C_4^7 = 35$

5 Resuelve: $\frac{(x+3)^3\lfloor x+1}{\lfloor x+1 + \lfloor x+2 + \lfloor x+3} = 7$

Resolución:

$$\frac{(x+3)^3\lfloor x+1}{\lfloor x+1 + \lfloor x+2 + \lfloor x+3} = 7$$

$$\frac{(x+3)^3.\lfloor x+1}{\lfloor x+1 + (x+2)\lfloor x+1 + (x+3)(x+2)\lfloor x+1} = 7$$

$$\frac{(x+3)^3}{(1+x+2)+(x+3)(x+2)} = 7$$

$$\frac{(x+3)^3}{(x+3)(1+x+2)} = 7$$

$$\frac{(x+3)^3}{(x+3)^2} = 7 \Rightarrow x+3 = 7$$

$x = 4$ $\quad$ CS = {4}

6 En el desarrollo de $\left(\frac{x^{2a}}{y^b} + \frac{y^c}{x}\right)^b$, determina:

$(a+b+c)$, de tal manera que admita un solo término central, cuya parte literal sea x^{12}, siendo $a \neq 1$ y $\{a; b; c\} \subset \mathbb{Z}^+$.

Resolución:

Si se tiene un solo término central, entonces **b** es par. Por fórmula:

$$t_c = \frac{b+2}{2} = \frac{b}{2} + 1$$

Luego: $t_{(b/2+1)} = C_{b/2}^b\left(\frac{x^{2a}}{y^b}\right)^{b-\frac{b}{2}}\left(\frac{y^c}{x}\right)^{\frac{b}{2}} = C_{b/2}^b\left(\frac{x^{2a}}{y^b}\right)^{\frac{b}{2}}\left(\frac{y^c}{x}\right)^{\frac{b}{2}}$

$$t_{(b/2+1)} = C_{b/2}^b x^{2a(b/2)-b/2}y^{c(b/2)-b^2/2}$$

Por dato: exponente de x es 12
exponente de y es 0

Entonces:

- $2a\left(\frac{b}{2}\right) - \frac{b}{2} = 12 \Rightarrow b(2a-1) = 24$ ... (1)
- $\frac{bc}{2} - \frac{b^2}{2} = 0 \Rightarrow c - b = 0 \Rightarrow c = b$ ... (2)

De (1): $b(2a-1) = 8(3) \Rightarrow b = 8 \wedge a = 2$

En (2): $c = 8$

Por lo tanto: $a + b + c = 8 + 2 + 8 = 18$

RADICACIÓN

Es la operación que tiene como objetivo calcular una expresión llamada raíz, tal que elevada al índice resulte otra expresión llamada radicando o cantidad subradical.

$$\sqrt[z]{x} = y \iff y^z = x$$

Donde:

z: índice: $z \in \mathbb{N}$; $z \geq 2$
y: raíz
x: cantidad subradical o radicando

Recuerda

Leyes de signos:

$\sqrt[impar]{\pm A} = \pm r$; $\sqrt[3]{-64} = -4$

$\sqrt[par]{+A} = +r$; $\sqrt{49} = 7$

$\sqrt[par]{-A} = \nexists$ en $\mathbb{R}$; $\sqrt{-7} = \sqrt{7}\,i$

i: unidad imaginaria



RADICALES DOBLES

Se les llama así a aquellos en cuyo interior aparecen otros radicales ligados entre sí por las operaciones de suma y resta.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} \iff A \text{ y } B \in \mathbb{Q}^+$$

Ejemplos:

$\sqrt{3+\sqrt{2}}$; $\sqrt{10-\sqrt{10}}$; $\sqrt{21-2\sqrt{7}}$

Transformación de radicales dobles a simples

Método de la fórmula (A; B > 0)

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Ejemplo:

Transforma a radicales simples.

- $\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{4^2-12}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{4^2-12}}{2}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{4}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{4}}{2}}$

  $\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{3} + 1$

Método práctico

$$\sqrt{(A+B) \pm 2\sqrt{AB}} = \sqrt{A} \pm \sqrt{B};\ A > B$$

Ejemplos:

Transforma a radicales simples.

- $\sqrt{10-\sqrt{84}} = \sqrt{10-2\sqrt{21}} = \sqrt{(7+3)-2\sqrt{7\times3}}$

  $\sqrt{10-\sqrt{84}} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$

- $\sqrt{2m-2\sqrt{m^2-4}}$

  $A = m+2 \quad \wedge \quad B = m-2$

  Entonces:

  $\sqrt{2m-2\sqrt{m^2-4}} = \sqrt{(m+2)+(m-2)-2\sqrt{(m+2)(m-2)}}$

  $\sqrt{2m-2\sqrt{m^2-4}} = \sqrt{m+2} - \sqrt{m-2}$

Observación

- Radicales homogéneos:

  $\sqrt[31]{107}$; $\sqrt[31]{2x^2}$; $\sqrt[31]{31}$

  tienen igual índice (31)

- Radicales semejantes:

  $\sqrt[3]{x^2}; -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}; 104\sqrt[3]{x^2}$

  tiene igual índice (3) e igual radicando (x^2)

- $x^m\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^{mn}y}$
- $\sqrt[n]{x^{mn}y} = \sqrt[n]{(x^m)^n y} = x^m\sqrt[n]{y}$





RACIONALIZACIÓN

Es el proceso que consiste en transformar el denominador irracional de una fracción, en otro que sea racional.

Factor racionalizante (FR)

Es aquella expresión irracional que al multiplicarla por una expresión irracional dada, la transforma en racional.
Para racionalizar una fracción bastará con multiplicar sus términos por el factor racionalizante del denominador.

Presentamos los FR de los casos más frecuentes en el denominador de una fracción:

I. Denominador: $\sqrt[A]{B^C}$; $A > C$; $A \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$; $B \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ $FR = \sqrt[A]{B^{A-C}}$ — B

II. Denominador: $\sqrt[2A]{B} \pm \sqrt[2A]{C}$; $A \in \mathbb{Z}^+$; B y $C \in \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow$ $FR = \sqrt[2A]{B} \mp \sqrt[2A]{C}$ — $\sqrt[A]{B} - \sqrt[A]{C}$

III. Denominador: $\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}$; A y $B \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $FR = \sqrt[3]{A}^2 \mp \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B}^2$ — $A \pm B$

IV. Denominador: $\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$; $n \geq 2$

$\Rightarrow$ $FR = \sqrt[n]{A}^{\,n-1} + \sqrt[n]{A}^{\,n-2}\sqrt[n]{B} + ... + \sqrt[n]{B}^{\,n-1}$ — $A - B$

V. Denominador: $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$; n: impar

$\Rightarrow$ $FR = \sqrt[n]{A}^{\,n-1} - \sqrt[n]{A}^{\,n-2}\sqrt[n]{B} + ... + \sqrt[n]{B}^{\,n-1}$ — $A + B$

VI. Denominador: $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$; n: par

$\Rightarrow$ $FR = \sqrt[n]{A}^{\,n-1} - \sqrt[n]{A}^{\,n-2}\sqrt[n]{B} + ... - \sqrt[n]{B}^{\,n-1}$ — $A + B$

Recordar

- Para los casos II y III, considerar:

$(\sqrt[2n]{A} \pm \sqrt[2n]{B})(\sqrt[2n]{A} \mp \sqrt[2n]{B}) = \sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$

$(\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A}^2 \mp \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B}^2) = A \pm B$



Observación

Decimos que dos expresiones son conjugadas si contienen radicales de índice 2 y difieren solamente en el signo que une sus términos. Como:

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

$3 + \sqrt{x}$ y $3 - \sqrt{x}$



Ejemplos:

I. $$\frac{10}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{10}{\sqrt[5]{2^3}}\left(\frac{\sqrt[5]{2^{5-3}}}{\sqrt[5]{2^{5-3}}}\right) = \frac{10\sqrt[5]{2^2}}{2} = 5\sqrt[5]{4}$$

II. $$\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}\right) = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = \frac{3}{5}(\sqrt{7} + \sqrt{2})$$

III. $$\frac{21}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = \frac{21}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}\left(\frac{\overbrace{\sqrt[3]{5}^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2}^{FR}}{\sqrt[3]{5}^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2}\right) = \frac{21FR}{\sqrt[3]{5}^3 - \sqrt[3]{2}^3} = \frac{21FR}{3} = 7FR$$

Nota

Sin usar las fórmulas podrías intentar transformar $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ a radicales simples buscando formar un trinomio cuadrado perfecto.

Veamos:

Si: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{A \pm \sqrt{4t}} = \sqrt{A \pm 2\sqrt{t}}$ $\Rightarrow$ Si se da el caso en el que se cumple: $A = x + y \wedge t = xy$

tendrías que: $A \pm 2\sqrt{t} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$ y finalmente te quedaría: $\sqrt{(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

Ejemplo:

$\sqrt{11 + \sqrt{120}} = \sqrt{11 + \sqrt{4.30}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$ $\Rightarrow \sqrt{11 + \sqrt{120}} = \sqrt{5 + 6 + 2\sqrt{5.6}} = \sqrt{5} + \sqrt{6}$

Problemas resueltos

1 Indica un radical simple de:

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{2-x^2}}$$

Considerando: $x^2 < 2 \wedge x > 1$

Resolución:

$$\sqrt{\underbrace{\frac{1}{x}}_{A}+\underbrace{\sqrt{2-x^2}}_{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}} \qquad ...(1)$$

Donde: $C = \sqrt{A^2 - B}$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{1}{x^2}-(2-x^2)} = \sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}}$$

$$C = \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{x^2}} = \frac{x^2-1}{x} \qquad ...(2)$$

Reemplazamos (2) en (1):

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x}+\frac{x^2-1}{x}}{2}}+\sqrt{\frac{\frac{1}{x}-\frac{x^2-1}{x}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{2x}}+\sqrt{\frac{2-x^2}{2x}}$$

$$= \sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2-x^2}{2x}}$$

Por lo tanto:

Un radical simple es: $\sqrt{\frac{x}{2}}$

2 Racionaliza el denominador de:

$$\frac{2}{1+\sqrt[3]{2}}$$

e indica el denominador racionalizado.

Resolución:

Racionalizamos:

$$\frac{2}{(1+\sqrt[3]{2})}\times\frac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})} = \frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{3}$$

$\therefore$ Su denominador es 3.

3 Simplifica:

$$R = \sqrt[3]{\frac{81}{3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{72}}+\sqrt[3]{\frac{8}{9}}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

Resolución:

Dando la forma:

$$R = \sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{\frac{1}{9\times 8}}+\sqrt[3]{\frac{8}{9}}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

Luego:

$$R = 3-\frac{1}{2\sqrt[3]{9}}+\frac{2}{\sqrt[3]{9}}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

Reduciendo:

$$R = 3+\frac{3.\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{3}}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

$$R = 3+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2} = 3$$

4 Sean:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}}+\sqrt{2004}-\sqrt{2005}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}+\sqrt{2003}-\sqrt{2004}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2002}}+\sqrt{2002}-\sqrt{2003}$$

Calcula:

$$M = (\sqrt{2004}+\sqrt{2003}+\sqrt{2002})^{A+B-C}$$

Resolución:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}}+\sqrt{2004}-\sqrt{2005}$$

$$A = \frac{(\sqrt{2005}-\sqrt{2004})}{\underbrace{(\sqrt{2005}+\sqrt{2004})(\sqrt{2005}-\sqrt{2004})}_{1}}+\sqrt{2004}-\sqrt{2005}$$

$$A = \sqrt{2005}-\sqrt{2004}+\sqrt{2004}-\sqrt{2005} = 0$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}+\sqrt{2003}-\sqrt{2004}$$

$$B = \frac{\sqrt{2004}-\sqrt{2003}}{\underbrace{(\sqrt{2004}+\sqrt{2003})(\sqrt{2004}-\sqrt{2003})}_{1}}+\sqrt{2003}-\sqrt{2004}$$

$$B = \sqrt{2004}-\sqrt{2003}+\sqrt{2003}-\sqrt{2004} = 0$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2002}}+\sqrt{2002}-\sqrt{2003}$$

$$C = \frac{\sqrt{2003}-\sqrt{2002}}{\underbrace{(\sqrt{2003}+\sqrt{2002})(\sqrt{2003}-\sqrt{2002})}_{1}}+\sqrt{2002}-\sqrt{2003}$$

$$C = \sqrt{2003}-\sqrt{2002}+\sqrt{2002}-\sqrt{2003} = 0$$

Nos piden:

$$M = (\sqrt{2004}+\sqrt{2003}+\sqrt{2002})^{A+B+C}$$

$$M = (\sqrt{2004}+\sqrt{2003}+\sqrt{2002})^{0} = 1$$

5 Racionaliza:

$$A = \frac{x-25}{x+7\sqrt{x}+10};\ x > 100$$

y determina el denominador racionalizado.

Resolución:

$$A = \frac{x-25}{x+7\sqrt{x}+10}\ ;\ x > 100$$

$$\sqrt{x}^2 + 7\sqrt{x} + 10 = (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}+2)$$

$\sqrt{x}$ 5

$\sqrt{x}$ 2

Luego:

$$A = \frac{(x-25)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)}$$

$$A = \frac{(x-25)(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-2)}{(x-25)(x-4)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-2)}{x-4}$$

El denominador es: $x-4$

6 Racionaliza la siguiente expresión:

$$E = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Resolución:

$$E = \frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$E = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(3+2\sqrt{2})-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})}$$

$$\therefore E = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}$$

7 Sabiendo que: $x^2 = x+1;\ x > 0$

reduce:

$$H = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

Resolución:

Multiplicamos por $(\sqrt{2})$ a la expresión:

$$\sqrt{2}H = \sqrt{2}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)$$

$$\sqrt{2}H = \sqrt{2x+2\sqrt{x}} - \sqrt{x-1}$$

Por condición: $x^2 = x+1 \Rightarrow x^2-1 = x$

Reemplazamos en la expresión:

$$\sqrt{2}H = \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{2}H = \underbrace{\sqrt{2x+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}}_{\text{Transformando}} - \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{2}H = (\sqrt{x+1}) + (\sqrt{x-1}) - \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{2}H = \sqrt{x+1}$$

$$H = \sqrt{\frac{(x+1)}{2}} = \sqrt{\frac{(x^2)}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}};\ \text{(por dato } x > 0)$$

$$H = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow H = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

8 Halla a y b en la siguiente igualdad:

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{10}} + \sqrt{-3+\sqrt{10}}}{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{10}}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Resolución:

Podemos escribir el numerador de la siguiente manera:

$$\text{Numerador} = \sqrt{3+\sqrt{10}} + \sqrt{-3+\sqrt{10}}$$

$$(\text{Numerador})^2 = 2\sqrt{10}+2 = 2(\sqrt{10}+1)$$

$$\Rightarrow \text{Numerador} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+1}$$

Reemplazamos y racionalizamos:

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+1}}{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{\sqrt{10}+1})(\sqrt{\sqrt{10}-3})}{\sqrt{2}(\sqrt{3+\sqrt{10}})(\sqrt{\sqrt{10}-3})} = \sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

Entonces:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5}-\sqrt{2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\therefore a = 5 \wedge b = 2$$

9 Halla: $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$, si $a = (2+\sqrt{3})^{-1}$ y $b = (2-\sqrt{3})^{-1}$

Resolución:

Racionalizamos **a** y **b**:

$$a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$b = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

Luego:

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{b+1} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 1$$

CONCEPTO

Son todos aquellos pares ordenados de componentes reales denotado por:

$$z = (a; b) / a; b \in \mathbb{R}$$

Donde:
a = Re(z) denominándose; parte real de z.
b = Im(z) denominándose; parte imaginaria de z.

El conjunto de todos los pares ordenados (a; b) forman el conjunto de los números complejos:

$$\mathbb{C} = \{(a; b) / a; b \in \mathbb{R}\}$$

Representación binómica (canónica o cartesiana)

$$z = a + bi; \ i = \sqrt{-1}$$

Recuerda

- Las cantidades imaginarias son aquellos números que resultan de extraer una raíz de índice par a un número real negativo.
  Así:
  $\sqrt{-1}; \sqrt{-21}; \sqrt[6]{-10}; \sqrt[2n]{-2}; \sqrt[12]{-5}$
- La unidad imaginaria es el número complejo (0; 1) que tiene la notación particular i = (0; 1) denotado por Euler de la siguiente manera:
  $i = \sqrt{-1}$



COMPLEJOS ESPECIALES

Opuesto de un complejo

De la forma canónica: z = a + bi; se define el complejo opuesto de z, denotado por z* como:

$$z^* = -a - bi$$

Ejemplos:

- $z = -5 - 3i \Rightarrow z^* = 5 + 3i$
- $B = 5 \Rightarrow B^* = -5$
- $P = \sqrt{3} - \sqrt{2}i \Rightarrow P^* = -\sqrt{3} + \sqrt{2}i$
- $A = \frac{1}{2}i \Rightarrow A^* = -\frac{1}{2}i$

Conjugado de un complejo

En este tipo de complejos el signo es contrario al de la parte imaginaria. De la forma cartesiana z = a + bi; se define el complejo conjugado de z, denotado por $\bar{z}$ como:

$$\bar{z} = a - bi$$

Ejemplos:

- $z = 10 - 7i \Rightarrow \bar{z} = 10 + 7i$
- $z = 7 \Rightarrow \bar{z} = 7$
- $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{7}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{7}i$
- $F = \frac{1}{2}i \Rightarrow \bar{F} = -\frac{1}{2}i$

Propiedades del conjugado

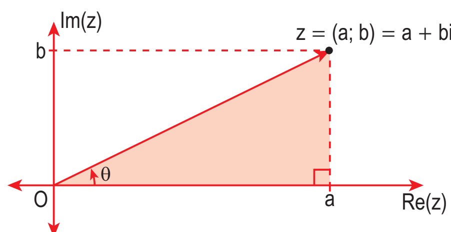
Si $\{z_1, z_2\} \in \mathbb{C}$:

1. $z_1 = \bar{z}_1 \iff z_1$ es un complejo real
2. $\bar{z}_2 = z^*_2 \iff z_2$ es imaginario puro
3. $z_1 + \bar{z}_1 = 2\text{Re}(z_1)$
4. $z_2 - \bar{z}_2 = 2i \,.\, \text{Im}(z_2)$
5. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
6. $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 \,.\, \bar{z}_2$
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \ \forall \ z_2 \neq (0; 0)$
8. $\overline{(\bar{z}_1)} = z_1$
9. $\overline{(z_1^n)} = (\bar{z}_1)^n; \ \forall n \in \mathbb{N}$
10. $\overline{(\sqrt[n]{z_1})} = \sqrt[n]{\bar{z}_1}; \ \forall n \in \mathbb{N}$
11. $|\text{Re}(z)| \leq |z|; \ |\text{Im}(z)| \leq |z|$



REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA O CARTESIANA DE UN COMPLEJO

Cada complejo es un punto en el plano, para ubicarlo se le representa en el llamado plano complejo, Gaussiano o Argand, el cual está formado por un eje vertical (eje imaginario) y un eje horizontal (eje real).



MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN COMPLEJO

El módulo o valor absoluto de $z = a + bi$ es un número real no negativo denotado por $|z|$, tal que:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, el módulo nos representa la magnitud del radio vector del complejo z de origen (0; 0) y extremo final el afijo de z.

Ejemplos:
Determina los módulos de los siguientes complejos:

1. $z_1 = -3 - 4i$
2. $z_2 = 3$
3. $z_3 = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{9i}{2}$
4. $z_4 = 7 - 4\sqrt{2}\,i$

Resolución:

1. $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
2. $|z_2| = 3$
3. $|z_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{88}{4}} = \sqrt{22}$
4. $|z_4| = \sqrt{7^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{81} = 9$

Propiedades

1. $|z| \geq 0$; si: $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = (0; 0)$

   Ejemplos:
   - Sea: $z = 1 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{2} \geq 0$
   - Si $z = 2i \Rightarrow |z| = 2 \geq 0$

2. $|z| = |\bar{z}| = |z^*|$

   Ejemplo: sea $z = -3 + 4i$, entonces:

   $$\left.\begin{array}{lll} z = -3 + 4i & \Rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} & = \sqrt{25} = 5 \\ \bar{z} = -3 - 4i & \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} & = \sqrt{25} = 5 \\ z^* = 3 - 4i & \Rightarrow |z^*| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} & = \sqrt{25} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow |z| = |\bar{z}| = |z^*|$$

3. $|z_1 \,.\, z_2| = |z_1| \,.\, |z_2|$

   Ejemplo:
   - $|(2 + 3i)\,.\,(1 - 3i)| = |11 - 3i| = \sqrt{(11)^2 + (-3)^2} = \sqrt{130}$

     $|(2 + 3i)\,.\,(1 - 3i)| = |2 + 3i||1 - 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2}\sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{13}\sqrt{10} = \sqrt{130}$

Observación

El **afijo** de un número complejo se representa por un par ordenado formado por la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria.

Veamos:

n.° complejo	Afijo del n.° complejo
$F = -2 + 5i$	$(-2; 5)$
$C = \sqrt{3} + \sqrt{2}\,i$	$(\sqrt{3}; \sqrt{2})$
$z = 3 - 5i$	$(3; -5)$



Atención

La forma binómica: $z = a + bi$ se denominará:

- **Complejo real**
  si: $b = 0$
- **Complejo imaginario puro**
  si: $a = 0$
- **Complejo nulo**
  si: $a = 0 \wedge b = 0$
- **Complejos iguales**
  si: $a + bi = x + yi$
  $\Rightarrow a = x \wedge b = y$

Nota

Considera las siguientes operaciones básicas con los complejos:
$z_1 = x + yi \wedge z_2 = m + ni$

- **Adición**

$z_1 + z_2 = (x + m) + (y + n)i$

- **Sustracción**

$z_1 - z_2 = (x - m) + (y - n)i$

- **Multiplicación**

$z_1 . z_2 = (xm - yn) + (xn + ym)i$

- **División**

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{xm + yn}{m^2 + n^2} + \frac{ym - xn}{m^2 + n^2}i$
$z_2 \neq (0; 0)$



4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq (0; 0)$

Ejemplo:

- $\left|\frac{3-2i}{2-i}\right| = \left|\frac{3-2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}\right| = \frac{1}{5}|8 - i| = \frac{1}{5}\sqrt{8^2 + (-1)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{65}$

$\left|\frac{3-2i}{2-i}\right| = \frac{|3-2i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{65}$

5. $|z^n| = |z|^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

6. $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$

7. $|z^2| = z . \bar{z}$

8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
Desigualdad triangular

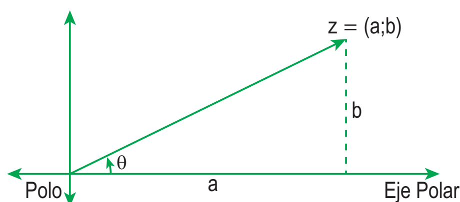
9. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

10. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

11. $|Re(z)| \leq |z|$

12. $|Im(z)| \leq |z|$

ARGUMENTO O AMPLITUD DE UN COMPLEJO Z (Arg(z); θ)



El argumento es el ángulo θ generado por el radio vector al girar en sentido antihorario desde el eje real positivo hacia un punto cualquiera del radio vector.

$$Arg(z) = 2k\pi + \theta$$
$$k = 0; 1; 2; 3...$$

Además:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) = \theta$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

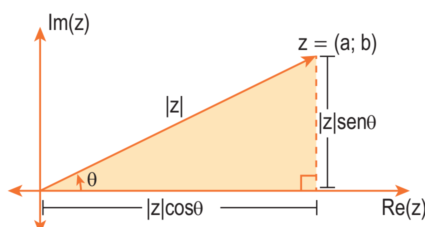
Observación

Si $k = 0 \Rightarrow Arg(z) = \theta$
$\Rightarrow$ θ se denomina: **argumento principal** de z.

El argumento "θ" puede ser expresado en radianes o grados sexagesimales.



RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LA FORMA CARTESIANA Y LA FORMA POLAR





Interrelacionando elementos del triángulo rectángulo sombreado
$z = (a; b) = a + bi = |z|\cos\theta + (|z|\text{sen}\theta)i = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$
Finalmente:

$$\underbrace{z = a + bi}_{\text{Forma cartesiana}} = \underbrace{|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}_{\text{Forma polar o trigonométrica}} = \underbrace{r\underline{|\theta}}_{\text{Forma polar (fasorial)}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{Forma exponencial}} = \underbrace{r\text{cis}\theta}_{\text{Forma sintética}}$$

Ejemplos:

1. Expresa en todas sus formas: $z = \sqrt{3} + i$

Resolución:
- Del dato observamos: $a = \sqrt{3}$ y $b = 1$
- Luego:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

- Las formas serán:

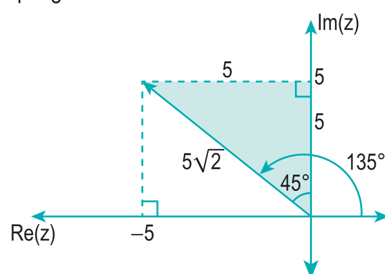
$$z = 2(\cos 30° + i\,\text{sen}30°)$$
$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$
$$z = 2\underline{|30°} = 2\underline{\left|\frac{\pi}{6}\right.}$$
$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z = 2\text{cis}\frac{\pi}{6}$$

2. Expresa en todas sus formas: $z = -5 + 5i$

Resolución:
- Observamos: $a = -5$ y $b = 5$
- Su módulo:

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Como se puede apreciar la parte real es negativo, para el cálculo de la amplitud necesariamente tendremos que graficar:

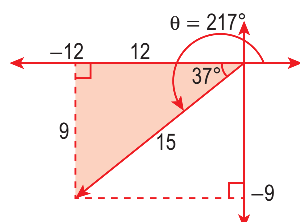


- Las formas serán:

$$z = -5 + 5i = 5\sqrt{2}\,(\cos 135° + i\text{sen}135°)$$
$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$z = 5\sqrt{2}\underline{|135°}$$
$$z = 5\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$$
$$z = 5\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

3. Expresa en todas sus formas: $z = -12 - 9i$

Resolución:
- Según las partes: $a = -12$ y $b = -9$
- El valor absoluto del complejo será:
  $|z| = 15$
- Graficando, para el cálculo de θ:



- Las formas serán:

$$z = -12 - 9i = 15(\cos 217° + i\text{sen}217°)$$
$$z = 15\left(\cos\left(\frac{217\pi}{180}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{217\pi}{180}\right)\right)$$
$$z = 15\underline{|217°}$$
$$z = 15e^{\frac{217\pi i}{180}}$$
$$z = 15\text{cis}\left(\frac{217\pi}{180}\right)$$

Atención

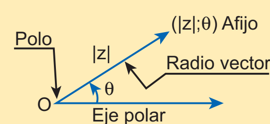
Los elementos que participan en la forma polar o trigonométrica son:

I. Polo u origen de coordenadas
Es el punto donde se intersecan los ejes real e imaginario.

II. Eje polar
Es el eje de las equis considerado a partir del origen hacia la derecha.

III. Módulo o longitud del radio vector (|z|)
Es la longitud del radio vector que genera el polo con el afijo.

IV. Norma ($|z|^2$)
Es el cuadrado del módulo.





Recuerda

- Para calcular el ángulo "θ" principal de un complejo se debe tener en cuenta en qué cuadrante se encuentra el afijo de z y luego calculamos según:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Nota

La multiplicación en diferentes representaciones serán:

Fasorial
$z_1 \, . \, z_2 = |z_1||z_2| \underline{|(\theta + \psi)}$

Exponencial
$z_1 \, . \, z_2 = |z_1||z_2| e^{(\theta + \psi)i}$

Sintética
$z_1 \, . \, z_2 = |z_1||z_2| \text{cis}(\theta + \psi)$

Nota

División en otras representaciones:

Fasorial
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \underline{|\theta - \psi}$

Exponencial
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{(\theta - \psi)i}$

Sintética
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{cis}(\theta - \psi)$

Atención

- Si el módulo del complejo z es la unidad, obtenemos:

$(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\text{sen}n\theta$

A esta igualdad se le llama: **fórmula de Moivre**

- Si el exponente es negativo, asumimos:

$z^{-n} = |z|^{-n}(\cos(-n\theta) + i\text{sen}(-n\theta))$



OPERACIONES CON LOS COMPLEJOS EN LAS DIFERENTES FORMAS

Multiplicación

- Dados los complejos:
  $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \;\wedge\; z_2 = |z_2|(\cos\psi + i\text{sen}\psi)$

- Luego:

$$\begin{aligned} z_1 \, . \, z_2 &= (|z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta))(|z_2|(\cos\psi + i\text{sen}\psi)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos\theta\cos\psi + i\cos\theta\text{sen}\psi + i\text{sen}\theta\cos\psi + i^2\text{sen}\theta\text{sen}\psi) \\ &= |z_1||z_2|(\underbrace{(\cos\theta\cos\psi - \text{sen}\theta\text{sen}\psi)}_{\cos(\theta + \psi)} + i(\underbrace{\cos\theta\text{sen}\psi + \text{sen}\theta\cos\psi}_{\text{sen}(\theta + \psi)})) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \, . \, z_2 = |z_1||z_2|((\cos(\theta + \psi) + i\text{sen}(\theta + \psi))}$$

Para realizar la multiplicación de complejos para este caso, en su forma polar, se multiplica primero los módulos y luego sumamos los argumentos.

División

- Sean los complejos:
  $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \wedge z_2 = |z_2|(\cos\psi + i\text{sen}\psi)$

- Luego:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}{|z_2|(\cos\psi + i\text{sen}\psi)}$$

$$= \frac{|z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}{|z_2|(\cos\psi + i\text{sen}\psi)} \cdot \frac{(\cos\psi - i\text{sen}\psi)}{(\cos\psi - i\text{sen}\psi)}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{(\cos\theta\cos\psi - i\cos\theta\text{sen}\psi + i\text{sen}\theta\cos\psi - i^2\text{sen}\theta\text{sen}\psi)}{\cos^2\psi - i^2\text{sen}^2\psi}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\overbrace{\cos\theta\cos\psi + \text{sen}\theta\text{sen}\psi}^{\cos(\theta - \psi)} + \overbrace{(i\text{sen}\theta\cos\psi - \cos\theta\text{sen}\psi)}^{\text{sen}(\theta - \psi)}}{\underbrace{\cos^2\psi + \text{sen}^2\psi}_{1}}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta - \psi) + i\text{sen}(\theta - \psi))}$$

Para realizar la división de dos complejos el módulo resultante estará representado por el cociente entre el módulo del dividendo y el módulo del divisor. El argumento de este cociente viene ser la diferencia entre los argumentos del dividendo y divisor.

Potenciación

- Del complejo: $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$
- Entonces: $z^n = (|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta))^n$

$$z^n = \underbrace{(|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta))(|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)) \ldots (|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta))}_{\text{"n" veces}}$$

- Por analogía, según el criterio de la multiplicación:

$$z^n = (\underbrace{|z||z| \ldots |z|}_{\text{"n" veces}})(\cos(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta}_{\text{"n" veces}}) + i\text{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta}_{\text{"n" veces}}))$$

$$\boxed{z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))}$$

En este caso el módulo resultante está elevado al exponente de la base inicial, mientras que el argumento resultante viene a ser el producto del argumento inicial por el exponente que inicialmente se elevó.



Radicación

- En principio sabemos que la raíz de un complejo da otro complejo, luego:

  $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$

- Sacando raíz nésima miembro a miembro:

  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)} = A(\cos\phi + i\text{sen}\phi)$

  Lo que queda ahora es expresar A y ϕ en función de |z| y θ.

- Elevando miembro a miembro al exponente "n":
  $|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = (A(\cos\phi + i\text{sen}\phi))^n = A^n(\cos n\phi + i\text{sen}n\phi)$



- Observamos por igualdad de complejos:
  $|z| = A^n \Rightarrow A = \sqrt[n]{|z|}$

- Ahora los argumentos también tendrán que ser iguales o diferenciarse en un número entero de vueltas ($2k\pi$), siendo $k \in \mathbb{Z}$:
  $\theta + 2k\pi = n\phi \Rightarrow \phi = \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

- Luego:

$$\sqrt[n]{|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Siendo: $k = \underbrace{0; 1; 2; 3; ...; (n-1)}_{\text{n valores}}$

Cuando se extrae la raíz enésima de un complejo, el módulo resultante estará expresado por la raíz enésima del módulo, el argumento resultante será igual al argumento inicial aumentado en un número entero de vueltas todo esto dividido entre el índice de la raíz.

Como ejemplos veamos algunas operaciones:

1. Dados los complejos:
   $z_1 = 5(\cos 217° + i\text{sen}217°) \wedge z_2 = 5(\cos 53° + i\text{sen}53°)$
   Determina: $z_1 . z_2$

   Resolución:
   $z_1 . z_2 = (5)(5)(\cos(217° + 53°) + i\text{sen}(217° + 53°)) = 25(\cos 270° + i\text{sen}270°)$

2. Del ejemplo anterior, determina: $\frac{z_1}{z_2}$

   Resolución:
   $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{5}(\cos(217° - 53°) + i\text{sen}(217° - 53°)) = \cos 164° + i\text{sen}164°$

3. Del ejemplo 1, determina: z_1^2

   Resolución:
   $z_1^2 = 5^2(\cos 2(217°) + i\text{sen}2(217°)) = 25(\cos 434° + i\text{sen}434°)$

4. Del ejemplo 1, determina: $\sqrt[3]{z_2}$

   Resolución:
   $\sqrt[3]{5(\cos 53° + i\text{sen}53°)} = \sqrt[3]{5}\left(\cos\left(\frac{53° + 2\pi k}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{53° + 2\pi k}{3}\right)\right)$

   Para $k = 0$; $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{5}\left(\cos\left(\frac{53°}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{53°}{3}\right)\right)$

   Para $k = 1$; $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{5}\left(\cos\left(\frac{413°}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{413°}{3}\right)\right)$

   Para $k = n - 1 = 2$; $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{5}\left(\cos\left(\frac{773°}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{773°}{3}\right)\right)$
   ⋮

Nota

Potenciación en otras representaciones:

Fasorial: $z^n = |z|^n \underline{|n\theta}$

Exponencial: $z^n = |z|^n e^{n\theta i}$

Sintética: $z^n = |z|^n \text{cis} n\theta$

Nota

Veamos otras representaciones de la radicación:

Fasorial:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z}\underline{\left|\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right.}$

Exponencial:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)i}$

Sintética:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\,\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

Atención

- Para el caso de la raíz cuadrada de un complejo en su forma cartesiana, haremos:
  $\sqrt{5 + 12i} = a + bi$
  Elevando la cuadrado:
  $5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi$
  Igualando:
  $5 = a^2 - b^2$
  $12 = 2ab$
  Resolviendo:
  $\left.\begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \end{matrix}\right\} \sqrt{5 + 12i} = 3 + 2i$

  $\left.\begin{matrix} a = -3 \\ b = -2 \end{matrix}\right\} \sqrt{5 + 12i} = -3 - 2i$

- Si nos piden la raíz enésima; transformaremos la forma cartesiana a su forma polar, ya que en esta forma es más fácil su cálculo.



RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

Observación

Ten en cuenta que $\sqrt[n]{z}$ tiene "n" valores.



Expresando a la unidad en su forma polar:

$$z = 1 = 1 + 0i = \cos 0° + i\operatorname{sen} 0° \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \cos\left(\frac{0° + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{0° + 2k\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = \cos 120°k + i\operatorname{sen} 120°k; \quad (k = 0; 1; 2)$$

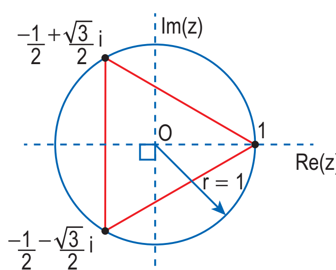
Para k = 0: $\sqrt[3]{z} = \cos 0° + i\operatorname{sen} 0° = 1 = 1$

Para k = 1: $\sqrt[3]{z} = \cos 120° + i\operatorname{sen} 120° = -\cos 60° + i\operatorname{sen} 60° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega$

Para k = 2: $\sqrt[3]{z} = \cos 240° + i\operatorname{sen} 240° = -\cos 60° - i\operatorname{sen} 60° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega^2$

Interpretación geométrica

Estos puntos: 1; ω, ω^2 en una circunferencia de radio unitario corresponden a los vértices de un triángulo equilátero.



Propiedades de las raíces cúbicas de la unidad

1. $\omega^{\pm 3k} = 1$
2. $\omega^{3k + q} = \omega^q$
3. $\omega^{-(3k - q)} = \omega^q$
4. $1 + \omega + \omega^2 = 0$

Recuerda

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega$
$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega^2$
Son **complejos conjugados.**



Ejemplos:

1. Calcula: $\omega^{-2\,353\,538}$

   Resolución:

   Al exponente –2 353 538 le falta 1 para que se cumpla la propiedad, luego hacemos:

   $-2\,353\,538 - 1 + 1 = -2\,353\,539 + 1 = -\overset{\circ}{3} + 1 = -(\overset{\circ}{3} - 1)$

   Donde: $\omega^{-2\,353\,538} = \omega^{-(\overset{\circ}{3} - 1)} = \omega^1 = \omega$ (propiedad 3.)

2. Sabiendo que: ω^2, ω y 1 son las respectivas raíces de la unidad.
   Determina:
   $H = ((100)^0 + \omega^{1153} - \omega^{103\,601})^4 + (2^0 - \omega^{454} + \omega^{344})^4$

   Resolución:

   Notamos que:

   - $\omega^{1153} = \omega^{1152 + 1} = \omega^{\overset{\circ}{3} + 1} = \omega$
   - $\omega^{103\,601} = \omega^{103\,599 + 2} = \omega^{\overset{\circ}{3} + 2} = \omega^2$
   - $\omega^{454} = \omega^{453 + 1} = \omega^{\overset{\circ}{3} + 1} = \omega$
   - $\omega^{344} = \omega^{342 + 2} = \omega^{\overset{\circ}{3} + 2} = \omega^2$



Reemplazando en H:

$$H = (1 + \omega - \omega^2)^4 + (1 - \omega + \omega^2)^4;\ \text{por dato: } 1 + \omega + \omega^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \omega = -\omega^2 \\ \wedge \\ 1 + \omega^2 = -\omega \end{cases}$$

$$H = (-\omega^2 - \omega^2)^4 + (-\omega - \omega)^4 = (-2\omega^2)^4 + (-2\omega)^4$$

$$H = 16\omega^8 + 16\omega^4 = 16\omega^{\overset{\circ}{3}+2} + 16\omega^{\overset{\circ}{3}+1} = 16(\omega^2 + \omega) = 16(-1) = -16$$

Forma exponencial de un número complejo

Se define la exponencial compleja, al número complejo:

$$\boxed{\cos\theta + i\,\text{sen}\theta = e^{i\theta}} \quad (e \cong 2{,}71828...)$$

Esta relación es comúnmente conocida con el nombre de su descubridor: **fórmula de Euler.**

Donde si:

$z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) \Rightarrow \boxed{z = |z|e^{i\theta}}$ θ: ángulo en radianes

En la fórmula de Euler, si sustituimos θ por $(-\theta)$ obtenemos:

$$\boxed{\cos\theta - i\,\text{sen}\theta = e^{-i\theta}}$$

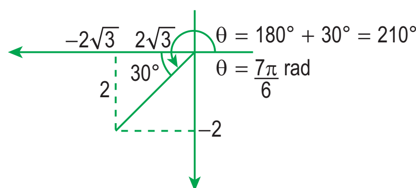
Ejemplos:

1. Expresa el complejo en su forma exponencial:
   $z = 30(\cos 15° + i\,\text{sen}15°)$

   Resolución:
   Identificando términos:
   $|z| = 30$ y $\theta = 15° = \dfrac{\pi}{12}$ rad $\Rightarrow z = 30e^{\frac{\pi}{12}i}$

2. Da la forma exponencial de:
   $z = -2\sqrt{3} - 2i$

   Resolución:
   Graficamos para determinar su argumento "θ":



Luego: $|z| = 4$; $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$ rad

$\therefore z = 4e^{\frac{7\pi}{6}i}$

Nota

I. Toma en cuenta el comportamiento de i^n; $n \in \mathbb{Z}^+$

$i^1 = i^5 = i^9 = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$
$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{\overset{\circ}{4}+2} = -1$
$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{\overset{\circ}{4}+3} = -1$
$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{\overset{\circ}{4}+4} = 1$

II. A partir de I se deducen:

1. $i^{\overset{\circ}{4}} = 1$
2. $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$
3. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$
4. $i + i^2 + i^3 + ... + i^{4n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$
5. $(1 + i)^2 = 2i$; $(1 - i)^2 = -2i$
6. $(1 + i)^4 = (1 - i)^4 = -4$
7. $\dfrac{1+i}{1-i} = i$ $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

III. Toma en cuenta también los teoremas:

1. $i^{-k} = (-1)^k i^k$; $k \in \mathbb{Z}^+$
2. $(\overset{\circ}{4} + r)^a = \overset{\circ}{4} + r^a$; $a \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$
3. $2^a = \overset{\circ}{4}$; $a \geq 2$; $a \in \mathbb{N}$

Nota

La letra "e" nos representa a la base de los logaritmos neperianos: $2 < e < 3$



Observamos

- De las fórmulas de Euler
  $\cos\theta + i\,\text{sen}\theta = e^{i\theta}$
  $\cos\theta - i\,\text{sen}\theta = e^{-i\theta}$

  Se deducen:

  $$\text{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

  $$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Estas relaciones nos expresan las funciones trigonométricas del argumento real θ por las funciones exponenciales de la amplitud imaginaria.

- Teoremas adicionales:

I. Si: $\text{cis}(\theta_1) = \text{cis}(\theta_2)$
$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$; $\forall k \in \mathbb{Z}$

II. Si $e^{\theta_1 i} = e^{\theta_2 i}$
$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$; $\forall k \in \mathbb{Z}$



Problemas resueltos

1 Efectúa:
$$T=\frac{i}{(1-3i)(i-3)}$$

Resolución:

$$T=\frac{i}{(1-3i)(i-3)}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por i.

$$T=\frac{i(i)}{i(1-3i)(i-3)}=\frac{i^2}{(i+3)(i-3)}=\frac{-1}{-10}=\frac{1}{10}$$

2 Calcula el módulo de z, si:
$$z=\frac{(-4+3i)^3(5\sqrt{3}-5i)^5\sqrt{1-i}}{(1+i)^2.(-3-3\sqrt{3}\,i)^7}$$

Resolución:

$$|z|=\frac{|(-4+3i)^3||(5\sqrt{3}-5i)^5||\sqrt{1-i}|}{|(1+i)^2||(-3-3\sqrt{3}\,i)^7|}$$

Ahora:

$$|-4+3i|^3=(\sqrt{(-4)^2+3^2})^3=5^3$$

$$|5(\sqrt{3}-i)|^5=(|5||\sqrt{3}-i|)^5$$

$$=(5\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2})^5$$

$$=5^5.2^5$$

$$|\sqrt{1-i}|=\sqrt{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt[4]{2}$$

$$|1+i|^2=(\sqrt{1^2+1^2})^2=2$$

$$|-3(1+\sqrt{3})i|^7=(3\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2})^7$$

$$=3^7.2^7$$

Reemplazando:

$$|z|=\frac{5^3.5^5.2^5.\sqrt[4]{2}}{2.3^7.2^7}$$

$$\therefore |z|=5^8.2^{-11/4}.3^{-7}$$

3 Halla un complejo que verifique:
$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3}\ \text{ y }\ \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1$$

Resolución:

Sea: $z=a+bi$

Del 2.° dato:

$$|z-4|=|z-8|$$

$$\Rightarrow |(a-4)+bi|=|(a-8)+bi|$$

$$\sqrt{(a-4)^2+b^2}=\sqrt{(a-8)^2+b^2}$$

$$(a-4)^2+b^2=(a-8)^2+b^2$$

$$a^2-8a+16=a^2-16a+64\Rightarrow a=6$$

Del 1.er dato:

$$3|z-12|=5|z-8i|$$

$$3\sqrt{(a-12)^2+b^2}=5\sqrt{a^2+(b-8)^2}$$

Elevando al cuadrado y reemplazando $a=6$:

$$9(6^2+b^2)=25(6^2+(b-8)^2)$$

$$324+9b^2=25(36+b^2-16b+64)$$

$$324+9b^2=900+25b^2-400b+1600$$

$$0=16b^2-400b+2176$$

$$0=b^2-25b+136=(b-17)(b-8)$$

$$\Rightarrow b=8\ \vee\ b=17$$

$$\therefore z=6+8i\vee z=6+17i$$

4 Reduce:
$$E=(1+i)^{41}+(1-i)^{41}$$

Resolución:

$$E=(1+i)^{41}+(1-i)^{41}$$

$$E=(1+i)^{40+1}+(1-i)^{40+1}$$

$$E=[(1+i)^4]^{10}(1+i)+[(1-i)^4]^{10}(1-i)$$

$$E=(-4)^{10}(1+i)+(-4)^{10}(1-i)$$

$$E=(4^{10})(1+i)+(4^{10})(1-i)$$

$$E=4^{10}+4^{10}i+4^{10}-i4^{10}$$

$$E=2(4^{10})$$

$$E=2.2^{20}=2^{21}$$

5 Si $z=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}}$

Calcula: $R=z^{-z^{-z^4}}$

Resolución:

Por dato:

$$z=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z^4=\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^4=4e^{\pi i}=4(-1)$$

$$z^4=-4$$

Piden:

$$R=z^{-z^{-z^4}}=z^{-z^{-(-4)}}=z^{-z^4}$$

$$\Rightarrow R=z^{-(-4)}=z^4$$

$$\therefore R=-4$$



6 Siendo: 1, ω, ω^2, las raíces cúbicas de 1, calcula:
$E=(1+\omega^2)^{10}+(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)\omega-5\omega$

Resolución:
Recordar que:
$\omega^3=1 \wedge 1+\omega+\omega^2=0$
Luego:
$E=(-\omega)^{10}+(1+\omega^2-\omega)(-\omega^2-\omega^2)\omega-5\omega$
$E=\omega^{10}+(-\omega-\omega)(-2\omega^2)\omega-5\omega$
$E=(\omega^3)^3\,\omega+2\omega\,.\,2\omega^3-5\omega$
$E=\omega+4\omega-5\omega \Rightarrow E=0$

7 Si: z_1 y z_2 son las raíces cuadradas del número complejo $z\neq 0$; entonces el valor de $(z_1+z_2)^3$ es:

Resolución:
Por dato: z_1 y z_2 son las raíces cuadradas del número complejo $z\neq 0$.
Entonces:
$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\right]$$
Para: $k=0 \Rightarrow z_1=|\sqrt{z}|\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)$

Para: $k=1 \Rightarrow z_2=|\sqrt{z}|\left(-\cos\frac{\theta}{2}-i\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow z_1+z_2=0$
$\therefore\ (z_1+z_2)^3=0$

8 Dados dos complejos z_1 y z_2 que cumplen:
$z_1^2+z_2^2=0$ y $\dfrac{z_1^2-z_2^2}{z_1-iz_2}=3+2i$

Calcula: $\dfrac{|z_1|+|\overline{z_2}|}{|z_1\,.\,z_2|}$

Resolución:
Dato:
$z_1^2+z_2^2=0$ ...(I)
$\dfrac{z_1^2-z_2^2}{z_1-iz_2}=3+2i$ ...(II)

De (I):
$z_1^2-i^2z_2^2=0$
$\underbrace{(z_1+iz_2)}_{=0}\underbrace{(z_1-iz_2)}_{\neq 0}=0$
$z_1+iz_2=0\Rightarrow z_1=-iz_2$ ...(III)

Tomando módulos:
$|z_1|=|-iz_2|=|z_2| \Rightarrow |z_1|=|z_2|$ ...(α)

Reemplazamos (III) en (II):
$$\frac{(-iz_2)^2-z_2^2}{-iz_2-iz_2}=3+2i$$
$$\frac{-2z_2^2}{-2iz_2}=3+2i \Rightarrow z_2=-2+3i$$
$|z_2|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$

De (α):
$|z_1|=|z_2|=\sqrt{13}$

Nos piden:
$$\frac{|z_1|+|\overline{z_2}|}{|z_1.z_2|}=\frac{|z_1|+|z_2|}{|z_1||z_2|}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}^2}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

9 Si: $\{z_1;z_2\}\subset\mathbb{C}$, calcula:
$$\text{Im}\left(\frac{5z_1+z_2}{3z_1+4z_2}\right)-\text{Im}\left(\frac{2z_1-3z_2}{3z_1+4z_2}\right)$$

Resolución:
Por propiedad:
$\text{Im}(z\pm w)=\text{Im}z\pm\text{Im}w$

En el problema:
$$P=\text{Im}\left(\frac{5z_1+z_2}{3z_1+4z_2}\right)-\text{Im}\left(\frac{2z_1-3z_2}{3z_1+4z_2}\right)$$
$$P=\text{Im}\left(\frac{5z_1+z_2-2z_1+3z_2}{3z_1+4z_2}\right)$$
$$\Rightarrow P=\text{Im}\left(\frac{3z_1+4z_2}{3z_1+4z_2}\right)=\text{Im}(1)$$
$\therefore P=\text{Im}(1+0i)=0$

10 Calcula el número de complejos z que verifican:
$z^2+12=|z|^2-i$

Resolución:
Si: $z^2+12=|z|^2-i$
Sea: $z=a+bi$
Reemplazamos:
$(a+bi)^2+12=a^2+b^2-i$
$a^2-b^2+2abi+12=a^2+b^2-i$
$(12-b^2)+2abi=b^2-i$

Comparamos:
$12-b^2=b^2\Rightarrow b=\pm\sqrt{6}$
$2ab=-1$ ...(I)

(*) Si: $b=\sqrt{6}$, en (I): $a=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$

Luego: $z_1=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}+\sqrt{6}\,i$

(*) Si: $b=-\sqrt{6}$, en (I): $a=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$

Luego: $z_2=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}-\sqrt{6}\,i$

∴ Existen 2 números complejos.

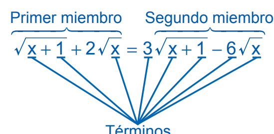


UNIDAD 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

Nota

Elementos de una ecuación:



Atención

Ten en consideración lo siguiente:

Solución de una ecuación de primer grado

Viene a ser el valor que toma la incógnita que al ser reemplazado en la ecuación la convierte en una identidad numérica o literal.

Así:

$$3+\cfrac{1}{\frac{41}{5}-x}=3+\cfrac{1}{x+\frac{1}{5}}$$

$\Rightarrow$ $x=4$ (solución o raíz)

Conjunto solución (CS)

Es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación.

Así:

$$nx+(1+2+...+n)=n^2$$

$\Rightarrow$ $CS=n-\frac{1}{2}$



Observación

Las ecuaciones LITERALES de primer grado tienen como coeficientes letras diferentes a la de la variable.



ECUACIÓN

Es un enunciado abierto, que se denomina así porque está constituido por variables y constantes, además este puede ser verdadero o falso.

En otras palabras, una ecuación es una igualdad de dos expresiones matemáticas que se verifica para algunos valores de su variable o incógnita.

Ejemplo:

$$\frac{x+1}{x+a+b}=1-\frac{a-b+1}{x+a-b}$$

Donde:
x: variable o incógnita
a; b: constantes

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

I. Según sus coeficientes

Ecuación numérica

Ejemplo:

$$\frac{x-2}{3}-\frac{x-2}{5}=6$$

Ecuación literal

Ejemplo:

$$\frac{a^2-ax}{b}-\frac{b^2+bx}{a}=x$$

II. Según sus soluciones

- **Compatible o consistente**

  Es aquella en la que el conjunto solución tiene por lo menos un elemento. Esta a su vez puede ser:

Compatible determinada	Compatible indeterminada
Es aquella en la que se puede enumerar los elementos del conjunto solución. Ejemplo: $5-\frac{x}{3}-\frac{x}{6}+6+6$ $\Rightarrow$ $CS=\{-2\}$ o $x=-2$ (solución o raíz)	Es aquella en la que no se puede enumerar los elementos del conjunto solución. Ejemplo: $4(x-2)+1=4(x+7)-35$ $\Rightarrow$ $0x+0=0$ $\Rightarrow$ $x\in\mathbb{R}$ o $CS=\mathbb{R}$

- **Incompatible (absurda o inconsistente)**

  Es aquella en la que el conjunto solución (CS) no presenta ningún elemento.

  Ejemplo: $2x+2\sqrt{5-x}=12+\sqrt{20-4x}$ $\Rightarrow$ $CS=\varnothing$ o $CS=\{\ \}$

  No hay algún valor de x que verifique la ecuación.

III. Según su forma

Fraccionarias

Si al menos presenta una variable en el denominador.

Ejemplo:

$$x-5+\frac{4}{x-3}=7-x+\frac{4}{x-3}$$

Irracionales

Cuando la variable se encuentra dentro de un radical.

Ejemplo.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$$

$$\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}=4$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Forma general de la ecuación lineal o de primer grado:

$$ax+b=0$$

Donde: x: incógnita (asume un valor a; b: constantes).

Análisis de la raíz o solución

i) Si: $a\neq 0 \wedge b\neq 0$, la ecuación lineal:
Compatible determinada o consistente
$\Rightarrow CS=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

ii) Si: $a=0 \wedge b\neq 0$, la ecuación lineal:
Incompatible o inconsistente $\Rightarrow$ $CS=\varnothing$ o $\{\ \}$

iii) Si $a\neq 0 \wedge b=0$, la ecuación lineal:
Determinada, su raíz es nula $x=0$ $\Rightarrow$ $CS=\{0\}$

iv) Si: $a=0 \wedge b=0$, la ecuación lineal:
Indeterminada, tiene infinitas raíces o soluciones
$\Rightarrow$ $CS=\mathbb{R}$



Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}+\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1}=6$$

Resolución:
Ten en cuenta la restricción de la raíz:

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)^2+(\sqrt{x-1}-1)^2}{(\sqrt{x-1})^2-1^2}=6;\ \sqrt{x-1}\geq 0$$

$\Rightarrow\ x\geq 1$

Aplicamos la identidad de Legendre:

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)^2+(\sqrt{x-1}-1)^2}{x-1-1}=6$$

$$\frac{\not{2}(\sqrt{x-1}^{\,2}+1^2)}{x-2}=6\Rightarrow\frac{x-1+1}{x-2}=3$$

$\Rightarrow x=3$

$\therefore$ La ecuación es consistente, su solución es: $x=3$

Veamos algunos indicaciones importantes:

a) Si el factor por el cual se multiplican ambos miembros de una ecuación contiene a la incógnita, es posible que se introduzcan soluciones extrañas. Entonces hacemos el factor diferente de cero.
Así:

- $\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{7}{x+3}$

  $\Rightarrow\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)(x+3)=\left(\dfrac{7}{x+3}\right)(x+3)$

  $\Rightarrow\ x-1=7\ \Rightarrow\ x=8$

  $\Rightarrow x+3\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq -3$

  (evitamos que se introduzcan soluciones extrañas.

  $\therefore\ x=8$

b) Si el divisor por el cual se dividen ambos miembros de una ecuación contiene a la incógnita, es posible que se estén eliminando soluciones de dicha ecuación. Entonces igualamos a cero dicho factor.
Así:

- $(3x-1)(x-1)=5(x-1)$

  $\dfrac{(3x-1)(x-1)}{x-1}=\dfrac{5(x-1)}{x-1}$

  $\Rightarrow 3x-1=5\ \Rightarrow\ x=2$

  $\Rightarrow\ x-1=0\ \Rightarrow\ x=1$

  (evitamos que se pierdan soluciones).

  $\therefore\ x=1\wedge x=2$

c) Si a los miembros de una ecuación los elevamos a un mismo exponente natural (≥ 2), es posible que se introduzcan soluciones extrañas; evitamos esto comprobando las soluciones encontradas en la ecuación original.
Así:

- $\sqrt{x^2+120}-x=6$

  $\Rightarrow(\sqrt{x^2+120})^2=(x+6)^2$

  $\Rightarrow\ 12x=84\ \Rightarrow\ x=7$

  Comprobando para $x=7$.

  $\Rightarrow 6=6$

  $\therefore$ La ecuación es compatible.

PLANTEO DE ECUACIONES

Ejemplo:

1. Con S/. M que tengo, podría ir 5 días al cine, 3 días a los juegos mecánicos y aún tendría S/. N. La entrada al cine cuesta S/. P menos que la de los juegos mecánicos. Determina lo que cuesta la entrada al cine.

   Resolución:
   Sea: x : el precio de entrada de los juegos mecánicos
   x – P : el precio de entrada al cine.

   Del enunciado:

   (n.° días) (precio de entrada de los juegos mecánicos) + (n.° días) (precio de entrada al cine) + (lo que le sobra de dinero) = (Dinero disponible)

   (3) (x) + (5) (x – P) + N = M

   - La expresión quedará así:

     $3x+5(x-P)+N=M$

     $3x+5x-5P+N=M$

     $8x=M+5P-N$

     $x=\dfrac{1}{8}(M+5P-N)$

   - Luego, la entrada del cine cuesta:

     $x-P=\dfrac{1}{8}(M+5P-N)-P$

     $=\dfrac{M+5P-N-8P}{8}$

     $x-P=S/.\left(\dfrac{M-3P-N}{8}\right)$

Nota

Dos ecuaciones son **equivalentes** si sus conjuntos soluciones poseen los mismos elementos.

Observación

Para las diferentes condiciones de a y b las raíces de la ecuación $ax+b=0$ serán:

Si:
$a\neq 0\ \wedge\ b\neq 0\ \Rightarrow\ ax+b=0$
$\Rightarrow\ x=-\dfrac{b}{a}$
Si:
$a=0\wedge b\neq 0\ \Rightarrow\ 0x+b=0$
$\Rightarrow\ x\in\varnothing$
Si:
$a\neq 0\wedge b=0\ \Rightarrow\ ax+0=0$
$\Rightarrow\ x=\dfrac{0}{a}=0$
Si:
$a=0\wedge b=0\Rightarrow 0x+0=0$
$\Rightarrow\ x\in\mathbb{R}$

Nota

Forma verbal lenguaje literal palabras	**Forma matemática** lenguaje algebraico constante y variables
El cuádruple del recíproco de B	$4\dfrac{1}{B}$
El doble de un número, disminuido en 20	$2x-20$
El doble de un número disminuido en 20	$2(x-20)$
Antecesor	$x-1$
Sucesor	$x+1$
El cuadrado del triple de A	$(3A)^2$
El doble del cuadrado de A	$2A^2$
Tres números consecutivos	$x-1;\ x;\ x+1$
Tres números impares consecutivos	$2(x-1);\ 2x;\ 2(x+1)$
10 es a x como 2 es a 7	$\dfrac{10}{x}=\dfrac{2}{7}$
El 37 por 5 de un número es 2	$\dfrac{37N}{5}=2$
M es siete veces N	$M=7N$
M es ocho veces más que N	$M=8N+N$
A excede a B en 100	$A=B+100$
A es excedido por B en 10	$B=A+10$
El triple de un número restado de otro.	$M-3N$
La inversa de la suma de las inversas de M y N	$\dfrac{1}{\frac{1}{M}+\frac{1}{N}}$

Nota

Para este tipo de problemas es necesario reconocer los siguientes elementos:

Sujetos
Es necesario identificar el número de sujetos que participan.

Tiempo: (verbo)
Identificar si la acción del problema se desarrolla en diferentes tiempos.

Pasado	Presente	Futuro
Hace 5 años fue.	Actualmente es, tiene, tengo	Dentro de 7 años será, tendrá

Condiciones
Relación entre las edades de los sujetos en el tiempo.

Atención

Otra forma de dar solución al problema 1 es "llevar" las condiciones del futuro hacia el presente:

	Presente	Dentro de 66 años
Cristina	x – 66	x
Dina	$\left(\frac{10}{9}x - 66\right)$	$\frac{10}{9}x$
	C+D=134	$D = \frac{10}{9}C$

Así:

$(x - 66) + \left(\frac{10}{9}x - 66\right) = 134$

$x = 126$

Edad actual de cada persona:

Cristina = x – 66 = 60 años
Dina $= \left(\frac{10}{9}x - 66\right) = 74$ años



Nota

- La diferencia de edades de dos personas en cada tiempo permanece constante.

Así:

	Hace 10 años	Hoy	Dentro de 20 años
Jacques	15	25	45
Paúl	10	20	40

$\Rightarrow 15 - 10 = 25 - 20 = 45 - 40 = 5$
Constante

Edades

Ejemplos:

1. La suma de las edades actuales de Cristina y Dina es 134 años, y dentro de 66 años la edad de Dina será los 10/9 de la de Cristina. Determina la edad de cada persona.

Resolución:

- Trasladamos los datos del enunciado en el cuadro siguiente:

	Presente	Dentro de 66 años
Cristina	x	x+ 66
Dina	134 – x	200 – x
	C + D = 134	$D = \frac{10}{9}C$

Trasladando las condiciones de las edades desde el presente hacia el futuro (dentro de 66 años): $D = \frac{10}{9}C$

- Reemplazamos expresiones en la condición:

$200 - x = \frac{10}{9}(x + 66) \Rightarrow 9(200 - x) = 10x + 660 \qquad \therefore x = 60$

- Luego, la edad de cada persona será:
  Cristina = x = 60 años
  Dina = 134 – x = 134 – 60 = 74 años

2. Jhonatan tiene 11 años más que su hermano Yovera, y Guisella su madre tiene 71 años. Dentro de 10 años entre los dos hermanos igualarán la edad de la madre. Determina las edades de los hermanos.

Resolución:
Veamos el cuadro siguiente:

	Hoy	Dentro de 10 años
Jhonatan	x + 11	x + 21
Yovera	x	x + 10
Guisella	71	81

Dentro de 10 años la suma de las edades de los hermanos será igual a la de la madre.

Así: $(x + 21) + (x + 10) = 81 \Rightarrow 2x + 31 = 81 \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$
Las edades de los hermanos:
Jhonatan = x + 11 = 25 + 11 = 36 años
Yovera = x = 25 años

Examen de admisión 2008 - I UNI (Aptitud académica)

3. Si Eder es 6 veces más viejo como Josué lo será cuando Lalo sea tan viejo como Eder es ahora. Determina la edad de Eder.

Para ello considera:

I. La suma de las edades de Eder y Lalo es 120 años.
II. Cuando Josué tenga la séptima parte de la edad que tiene Eder, Lalo tendrá 77 años.

Verifica la verdad o falsedad de las proporciones:

A) La información I es insuficiente.
B) La información II es suficiente.
C) Las dos informaciones son necesarias.
D) Las informaciones por separado son insuficientes.
E) Las dos informaciones necesariamente a la vez se tienen que utilizar.

Resolución:
Del enunciado tenemos lo siguiente:

	Presente	Futuro
Eder	7x	
Josué		x
Lalo		7x

De la información I, la suma de las edades de Eder y Lalo es 120 años, no permite calcular la edad de Eder ya que no sabemos la edad actual de Lalo; luego la información I es insuficiente.

De la información II, cuando Josué tenga la séptima parte de la edad que tiene Eder. Lalo tendrá 77 años; en el futuro ya conocemos la edad de Lalo que es la misma de Eder actualmente, entonces Eder tiene77 años. Luego; la información II es suficiente $\Rightarrow$

A) V B) V C) F D) F E) F

Problemas resueltos



1 Resuelve:

$$\frac{2\sqrt[4]{3+\frac{x}{2}}}{x}+\frac{\sqrt[4]{3+\frac{x}{2}}}{3}=\frac{2\sqrt[4]{x}}{3}$$

Resolución:

$$\sqrt[4]{\frac{6+x}{x}}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{6+x}{x}\right)\left(\frac{6+x}{3x}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}$$

$$\frac{(6+x)^5}{x^5}=2^5$$

Luego:

$6+x=2x$

$x=6$

$CS=\{6\}$

2 Calcula m + n sabiendo que la ecuación: $\frac{mx-1}{n}-\frac{x-2}{4}=x+2$ resulta indeterminada.

Resolución:

$$\frac{mx-1}{n}-\frac{x-2}{4}=x+2$$

$4mx-4-nx+2n=(x+2)(4n)$

$4mx-4-nx+2n=4nx+8n$

$(4m-n-4n)x+2n-4-8n=0$

$(4m-5n)x-6n-4=0$

Se cumple por ser indeterminada:

$4m-5n=0$

$\Rightarrow 4m=5n$ ...(1)

$-6n-4=0$

$6n=-4$

$n=-\frac{2}{3}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$4m=5\left(-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow m=-\frac{5}{6}$

Piden:

$m+n=-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}=-1,5$

3 Determina el valor de a + b + c, si la ecuación de primer grado en x: $\frac{b}{4}x^2+\left(\frac{c}{3}-1\right)x+a=x^2;\ 2b=a$

Tiene por raíz al número (–1).

Resolución:

Por dato: la ecuación es de primer grado.

$\underbrace{\left(\frac{b}{4}-1\right)}_{0}x^2+\left(\frac{c}{3}-1\right)x+a=0$ ...(1)

$\Rightarrow b=4$

Además: $a=2b\Rightarrow a=8$

Reemplazando $a=8$ y $b=4$ en (1):

$\left(\frac{c}{3}-1\right)x+8=0$

Evaluando la raíz $x=-1$:

$-\frac{c}{3}+1+8=0$

$\Rightarrow c=27$ $\quad\therefore\ a+b+c=8+4+27=39$

4 Carolina le dice a Edgard: "Yo tengo el cuádruplo de la edad que tú tenías cuando yo tenía 17 años". Edgard tiene hoy 33 años. ¿Qué edad tiene Carolina?

Resolución:

	Pasado	Presente
Carolina	17	4x
Edgard	x	33

n años

Como la cantidad de años que transcurre es igual para ambos, entonces:

$n=33-x=4x-17$

$50=5x$

$\Rightarrow x=10\Rightarrow 4x=40$

Por lo tanto, Carolina tiene 40 años.

5 Resuelve: $\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}=4$

Resolución:

$\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}=4$

Recuerda:

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

Elevamos al cubo:

$(\sqrt[3]{14+\sqrt{x}})^3+(\sqrt[3]{14-\sqrt{x}})^3+3\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}$

$.\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\ .\ 4=4^3$

$28+3\sqrt[3]{(14+\sqrt{x})(14-\sqrt{x})}\,(4)=64$

$12(\sqrt[3]{14^2-x})=36$

$\sqrt[3]{14^2-x}=3$

Elevamos al cubo:

$14^2-x=3^3$ $\quad\therefore\ x=14^2-3^3=169$

6 ¿Qué día del año marcará la hoja de un almanaque, cuando el número de días transcurridos del año exceda en 2 a los 3/8 del número de días que faltan por transcurrir? (El año no es bisiesto).

Resolución:

Días transcurridos: x

1 año: 365 días

$x-\frac{3}{8}\underbrace{(365-x)}_{\text{días que faltan transcurrir}}=2$

$8x-1095+3x=16$

$11x=1111$

$x=101$

	Enero	Febrero	Marzo	Abril
días:	31	28	31	11

101 días transcurridos

$\therefore$ El almanaque marcará 12 de abril.

Nota

- El ORDEN DE UNA MATRIZ viene dada por la representación m×n, donde:
  m: número de filas.
  n: número de columnas.
- Notación de Kronecker

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ $\quad i \in [1; m]$, $j \in [1; n]$

Ejemplo:
De la matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & \sqrt{3} & 3 \\ -2 & 10 & \text{sen}5° & -10 \\ \sqrt{2} & \pi & 10 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$a_{22} = 10$; $a_{32} = \pi$; $a_{31} = \sqrt{2}$

Recuerda

Adición de matrices
Las matrices deben ser de igual orden.
Veamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-3) & (-1+2) \\ (3+2) & (2+5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de un escalar por una matriz

Veamos: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$5A = \begin{pmatrix} 5(2) & 5(-1) \\ 5(5) & 5(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 25 & 15 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna
El número de columnas de la matriz fila debe ser igual al número de filas de la matriz columna.

$$(5\ 2\ -1)_{1\times 3}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$= 5(3) + 2(4) + (-1)2 = 21$



MATRIZ

Es un arreglo rectangular de m por n elementos dispuestos en filas (m) y columnas (n). Al arreglo de esta forma se le denomina matriz de orden m × n.

Representación general:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Notación de Leibnitz

Igualdad de matrices

Dos matrices del mismo orden son iguales si todos sus elementos de la misma posición son respectivamente iguales.

Sean las matrices: $A = (a_{ij})_{m\times n} \wedge B = (b_{ij})_{m\times n}$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \forall i; j$$

Multiplicación de matrices

Sean las matrices: $A = (a_{ij})_{m\times n} \wedge B = (b_{ij})_{n\times p}$

Se define:

$$AB = (a_{ij})_{m\times n} \cdot (b_{ij})_{n\times p} = (c_{ij})_{m\times p}$$

iguales

Donde: c_{ij} resulta de multiplicar la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.

Ejemplo: examen de admisión UNI 2005-II (matemática)

Sea Y un número real no nulo.

Calcula: (E + L) – (T + U), si E, L, T y U satisfacen el siguiente producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ T & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & L \\ T & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ E & L \end{pmatrix}$$

Resolución:

- Multiplicando las matrices:

$$\begin{pmatrix} YE + 0T & YL + 0U \\ TE + UT & TL + U^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ E & L \end{pmatrix}$$

- Por igualdad de matrices:

$YE + 0T = Y \Rightarrow YE = Y$ ...(1)

$YL + 0U = 0 \Rightarrow YL = 0$ ...(2)

$TE + UT = E \Rightarrow T(E + U) = E$ ...(3)

$TL + U^2 = L \Rightarrow TL + U^2 = L$ ...(4)

De (1) como $Y \neq 0 \Rightarrow E = 1$

De (2) como $Y \neq 0 \Rightarrow L = 0$

De (4) como $L = 0 \Rightarrow U = 0$

De (3) como $E = 1 \Rightarrow T = 1$

- Lo solicitado es:

$(E + L) - (T + U) = (1 + 0) - (1 + 0) = 1 - 1 = 0$



TEOREMAS

Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y la multiplicación, además el escalar $m \in \mathbb{R}$.

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $ABC = (AB)C = A(BC)$
4. $m(A + B) = mA + mB$
5. $AB = \mathbb{O}$, no implica que $A = \mathbb{O}$ o $B = \mathbb{O}$.
6. $AB = AC$, no implica que $B = C$
7. AB no necesariamente es igual a BA.
8. Si: $A = B \Rightarrow AC = BC \vee CA = CB$

Para una matriz cuadrada A:

$A^2 = AA$ | $A^3 = A^2A = AA^2$ | $A^4 = A^3A = AA^3$ | $A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Se obtiene al intercambiar filas por columnas o columnas por filas. Se denota por: A^T

Ejemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

2. Examen de admisión UNI 2009-II (matemática)

   En un antiguo texto, se encuentra la matriz:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, y del producto A^2A^T la última columna, la cual es $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Halla la matriz A.

   Resolución:

   Determinamos los valores de x, y, z a partir de A^2A^T:

   $$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & xy \\ 0 & 0 & yz \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} \wedge A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \end{pmatrix}$$

   $$A^2A^T = \begin{pmatrix} 1 & x & xy \\ 0 & 0 & yz \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & xy^2 & xyz \\ 0 & y^2z & yz^2 \\ 0 & yz^2 & z^3 \end{pmatrix}$$

   Por dato nos dicen:

   $$\begin{pmatrix} xyz \\ yz^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} xyz = -6 \\ yz^2 = 2 \\ z^3 = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

   Con los valores determinados, formamos la matriz A.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Recuerda

I. Si: $AB = BA$ (matrices conmutativas)
II. Si: $AB = -BA$ (matrices anticonmutativas)

Nota

Tipos especiales de matrices

Matriz cuadrada
Se dice que una matriz A es cuadrada cuando el número de filas es igual al número de columnas.
Se denota: $A_{n \times n}$
Ejemplos:
• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

En una matriz $A_{n \times n}$, los elementos a_{11}; a_{22}; a_{33}; ... ; a_{nn} forman la diagonal principal de la matriz.

Matriz nula
Es aquella en la cual todos sus elementos son ceros.
Se denota: $\mathbb{O}$

Atención

Propiedades:
1. $(A^T)^T = A$
2. $(mA)^T = mA^T$; $\forall m \in \mathbb{R}$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4. $(AB)^T = B^TA^T$

CARACTERÍSTICAS PARTICULARES DE MATRICES CUADRADAS

1. Matriz simétrica

Una matriz cuadrada es simétrica si es igual a su matriz transpuesta.

$$\boxed{A = A^T}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada es antisimétrica si es igual al negativo de su transpuesta.

$$\boxed{A = -A^T}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Matriz nilpotente

Una matriz cuadrada se dice nilpotente de índice K, si $A^K = \mathbb{O}$; donde $\mathbb{O}$ es la matriz nula; además $A^{K-1} \neq \mathbb{O}$.

$$\boxed{A^K = \mathbb{O}}$$; donde:
$\mathbb{O}$: matriz nula
K: índice de nilpotencia

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}; A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ A es una matriz nilpotente de índice 3.

4. Matriz involutiva

Una matriz cuadrada es involutiva si su cuadrado es igual a la matriz identidad.

$$\boxed{A^2 = I}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A.A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

5. Matriz idempotente

Una matriz cuadrada A es idempotente, si verifica:

$$\boxed{A^2 = A}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A\,.\,A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$



Recuerda

Matrices cuadradas especiales

1. Matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 10 & 5 \\ 0 & 7 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Matriz triangular inferior

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Matriz escalar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Matriz identidad

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Ejemplos: examen de admisión UNI 2009-II (matemática)

Indica la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si A es una matriz de orden $m \times n$ y B es una matriz de orden $n \times p$, entonces $A + B$ es de orden $m \times p$.

II. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 4×4; entonces existe un número natural K, tal que $A^K = 0$.

III. Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces: $A + A^T = 0$

Resolución:

I. Falsa (F).
Si A es una matriz de orden 3×2 y B una matriz de orden 2×4; se tiene que la suma $A + B$ no está definida, puesto que A y B tienen diferente orden.

II. Verdadera (V).

Realizando la multiplicación de matrices:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A^4 = 0 \Rightarrow k = 4$; en estos casos a la matriz A se le denomina MATRIZ NILPOTENTE.

III. Falsa (F).

Supongamos que nuestra matriz sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$

DETERMINANTE

Es una función que aplicada a una MATRIZ CUADRADA nos proporciona un número real.

Propiedades de los determinantes

Dadas las matrices cuadradas A y B y el escalar $k \in \mathbb{R}$.

a) El determinante de una matriz cuadrada y el determinante de su transpuesta son iguales.

$$|A| = |A^T|$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 11;\ |A^T| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow |A| = |A^T|$$

Atención

Dada una matriz cuadrada, se llama TRAZA DE UNA MATRIZ (Traz(A)) a la suma de los elementos de la diagonal principal (DP).

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ DP

$Traz(A) = 5 + 2 + (-1) = 6$

Propiedades

1. $Traz(A \pm B) = Traz(A) \pm Traz(B)$
2. $Traz(mA) = mTraz(A)$; $\forall m$ escalar $(m \neq 0)$.
3. $Traz(AB) = Traz(BA)$

Observación

Los ELEMENTOS HOMÓLOGOS de una matriz son aquellos elementos que tienen la misma ubicación, pero en diferentes matrices.



Nota

Sea A una matriz cuadrada, su determinante se denota por:

$|A|$, D(A), Det(A)

Atención

También se cumple:

- $|AB| = |A||B|$
- $|A + B| \neq |A| + |B|$
- $|A^n| = |A|^n$; $n \in \mathbb{N}$



Nota

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$k \neq 0$

$\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$|B| = k|A|$

$|B| = k^n|A|$; A de orden n

$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$

$|kA| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$|kA| = k^2|A|$

A de orden n = 2.

Observación

También se puede aplicar operaciones elementales de tal manera que se obtenga la mayor cantidad de ceros en una fila o columna, es decir, sumar a una cierta fila (o columna) una cierta cantidad de veces otra fila (o columna) para luego desarrollar usando MENORES COMPLEMENTARIOS.



b) El determinante de una matriz es igual a cero, si todos los elementos de una fila o columna son ceros.
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

c) Si B es la matriz que se obtiene a partir de A, luego de multiplicar a los elementos de una línea (fila o columna) por un escalar k ($k \neq 0$) entonces:

$$|B| = k|A|$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 3.2\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

d) El determinante de una matriz es igual a cero, si los elementos de dos líneas (filas o columnas) son iguales o proporcionales.
Ejemplos:

- $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 10 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

e) Cuando se permutan dos líneas (filas o columnas), el determinante cambia de signo.

- Si: $|A| = \begin{vmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ a & b & c \end{vmatrix} = 581 \Rightarrow \begin{vmatrix} p & n & m \\ s & r & q \\ c & b & a \end{vmatrix} = -581$

f) Si en una matriz cuadrada, los elementos de una cierta línea (fila o columna) son la suma de varias cantidades, el determinante puede descomponerse en la suma de tantos determinantes como términos tenga la línea.
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m+n+p & q+r+s & t+u+v \\ j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & q & t \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ n & r & u \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & s & v \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

g) El determinante no varía si a todos los elementos de una de sus líneas (filas o columnas) se le suma o resta un múltiplo de otra línea.

h) El determinante de una matriz triangular superior o inferior, y de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3+f_1 \\ f_4-3f_1}]{f_2+2f_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_4+f_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1(-1)(5)(-4) = 20$$

i) El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar, es igual a cero.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 0 & 7 \\ 8 & -7 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

Ejemplo: examen de admisión UNI 2012-I (matemática)

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & j \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Determina la matriz P, tal que: $PAP = \begin{pmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & j & e \end{pmatrix}$



Resolución:

- Realizando operaciones elementales de filas y columnas:
  Intercambiando la fila 2 y la fila 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & j \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & j \end{pmatrix}$$

  Intercambiando la columna 2 y la columna 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & j \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & j & e \end{pmatrix}$$

- Se multiplicó primero por la izquierda luego por la derecha:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . A}^{1.°} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{2.°} = PAP$$

- La matriz P será:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación

$PAP = (PA)P = P(AP)$



Menor complementario de un elemento

El menor complementario de la componente (elemento) ij denotado por $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz dada.
Para:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$ el menor complementario de $a_{21} = 5$ es: $|M_{21}| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8(5) - (-1)2 = 42$

Atención

- Una matriz cuadrada A es regular (no singular) si:

  $|A| \neq 0$

- Una matriz cuadrada A es singular si:

  $|A| = 0$



Adjunto (cofactor) de un elemento

El adjunto del elemento a_{ij} denotado por Φ_{ij} se define:

$$\Phi_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

Ejemplo: para la matriz del ejemplo anterior: $\Phi_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -42$

Teorema fundamental

El determinante de una matriz será igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus respectivos adjuntos.

Para:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Recuerda

El cálculo de los determinantes solo es posible a MATRICES CUADRADAS.



Nota

La función: $(-1)^{i+j}$ permite formar el cuadrado de signos.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Considerando la 1.ª fila:

$$\begin{matrix} 3 & 8 & 2 \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$|A| = +3\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(9(5) - (-1)1) - 8(5(5) - 2(1)) + 2(5(-1) - 2(9)) = -92$$



Observación

Para aplicar el teorema fundamental se recomienda escoger la línea (fila o columna) que tenga la mayor cantidad de ceros.

Matriz adjunta

A la transpuesta de la matriz de adjuntos o cofactores se le llama adjunta de la matriz A (Adj(A)).
Sea la matriz A anteriormente definida y Φ_{ij} el adjunto de a_{ij}, entonces la matriz de los adjuntos o cofactores será:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \cdots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \cdots & \Phi_{2n} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \cdots & \Phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \Phi_{n3} & \cdots & \Phi_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Adj(A) = \Phi^T}$$

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, halla su matriz adjunta.

Resolución:

- Determinando los respectivos adjuntos de cada elemento de la matriz A:

$$\Phi_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10;\ \Phi_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5;\ \Phi_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Phi_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 16;\ \Phi_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -13;\ \Phi_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Phi_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1;\ \Phi_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7;\ \Phi_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$



Observación

De la definición de una matriz transpuesta:

$$\Phi^T = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21} & \Phi_{31} & \cdots & \Phi_{n1} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \Phi_{32} & \cdots & \Phi_{n2} \\ \Phi_{13} & \Phi_{23} & \Phi_{33} & \cdots & \Phi_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{1n} & \Phi_{2n} & \Phi_{3n} & \cdots & \Phi_{nn} \end{bmatrix}$$

- Luego:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -10 & 16 & 1 \\ 5 & -13 & 7 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \Phi^T = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 16 & -13 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Atención

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si es una matriz NO SINGULAR, en tal caso se dice que la matriz es invertible.

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Matriz inversa

Sea una matriz cuadrada no singular, si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que $AB = BA = I$, entonces definimos a B como la matriz inversa de A y la denotamos por: A^{-1}

Teorema

Sea A una matriz invertible, entonces la matriz inversa está dada por:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}}$$



Ejemplos:

1. Orden uno: $A = (a) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a}$; $a \neq 0$

2. Orden dos: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; $|A| \neq 0$



3. Examen de admisión UNI 2011-II (matemática)
Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & k & k \end{pmatrix}$$

Determina el conjunto de valores de k para que A sea invertible.

Resolución:
Haciendo operaciones con las filas de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3 - f_2]{f_2 - f_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 0 & k-4 & 4-k \\ 0 & 0 & k-4 \end{vmatrix} = (k-4)^2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 4$$

$$\therefore k \in \mathbb{R} - \{4\}$$

Recuerda

- Una matriz cuadrada será invertible, si: $|A| \neq 0$
- El determinante de una matriz triangular superior esta dado por el producto de los elementos de la diagonal principal.



Determinante de Vandermonde

En forma general, para una matriz de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{x-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \prod_{(i<j)} (x_i - x_j)$$

Atención

De la forma general, se deduce:

- Determinante de Vandermonde:
  De orden dos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

- De orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

EFECTUAR

1. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula el valor de: $E = a_{12} + a_{22}^2 + a_{33}$

2. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 2x-1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3y & 6y \\ -2z & -1 \end{pmatrix}$$

Además A = B.
Calcula el valor de: $E = 4x + 2y - z$

3. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C = 2A + 3B$

Halla traza de C.

4. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y el polinomio $P(x) = 5x - 2$
Halla la suma de los elementos de P(A).

5. Dadas las matrices:

$$A = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 4); \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Halla AB.

6. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ calcula: } A^2$$

Problemas resueltos

1 Sean las matrices:

$$U=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$Q=\alpha U+\beta V$ donde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Determina los valores de α, β para los cuales existen los números reales p, q tales que, simultáneamente, se cumple:

$$Q\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad\wedge\quad Q\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=q\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Resolución:

Como nos indica el enunciado:

$$Q=\alpha\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad ...(1)$$

Multiplicando ambas matrices en (1) por: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$Q\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}6\\12\\6\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=6\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow p=6\alpha$$

Ahora multiplicando ambas matrices en (1) por: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$Q\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=2\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow q=2\beta$$

Deducimos luego, que como p y q pueden tomar cualquier valor (arbitrario), entonces: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2 Determina los valores del número real x para que la matriz:

$A=\begin{pmatrix}\sqrt{x+3}&\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}\\3&\end{pmatrix}$ sea invertible.

Resolución:

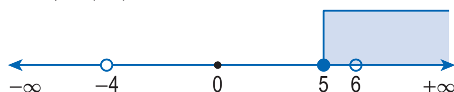
Debes saber que una matriz tiene inversa si: $|A|\neq 0$

Entonces:

$$|A|=\begin{vmatrix}\sqrt{x+3}&\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}\\3&\end{vmatrix}=(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-5})-(3)(1)\neq 0\wedge x\geq 5$$

Operando adecuadamente:

$$(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-5})\neq 3\wedge x\geq 5$$
$$(x+3)(x-5)\neq 9\wedge x\geq 5$$
$$x^2-2x-15-9\neq 0\wedge x\geq 5$$
$$x^2-2x-24\neq 0\wedge x\geq 5$$
$$(x-6)(x+4)\neq 0\wedge x\geq 5$$
$$x\neq 6\,;\,x\neq -4\wedge x\geq 5$$



Según el gráfico, establecemos: $x\geq 5\wedge x\neq 6$

3 Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&\dfrac{bc+x}{a}\end{pmatrix}$$

Halla todos los valores de x para los cuales existe una matriz B tal que:

$$AB=BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Resolución:

Considerando según la teoría:

Como: $AB=BA=I\Rightarrow |A|\neq 0$

$$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&\dfrac{bc+x}{a}\end{vmatrix}=a\left(\frac{bc+x}{a}\right)-cb\neq 0$$

Reduciendo obtenemos:

$$a\left(\frac{bc+x}{a}\right)-cb\neq 0\Rightarrow bc+x-cb\neq 0\Rightarrow x\neq 0$$

$\therefore\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

4 Si se sabe que los números 945 193; 525 217; 754 585; 292 201 y 356 269 son divisibles por 19, halla el residuo de dividir el determinante de la matriz A entre 19.

$$A=\begin{pmatrix}1&9&3&4&5&9\\2&1&7&2&5&5\\5&8&5&5&4&7\\2&0&1&9&2&2\\2&6&9&5&6&3\\8&3&8&8&3&3\end{pmatrix}$$

Resolución:

En la 3.ª columna, hacemos la siguiente operación:

$C_3+10^5C_6+10^4C_4+10^3C_5+10^2C_1+10C_2$

Se tiene:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&9&945\,193&4&5&9\\2&1&525\,217&2&5&5\\5&8&754\,585&5&4&7\\2&0&292\,201&9&2&2\\2&6&356\,269&5&6&3\\8&3&383\,838&8&3&3\end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A|=19\begin{vmatrix}1&9&49\,747&4&5&9\\2&1&27\,643&2&5&5\\5&8&39\,715&5&4&7\\2&0&15\,379&9&2&2\\2&6&18\,751&5&6&3\\8&3&20\,202&8&3&3\end{vmatrix}=19k;\ k\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow |A|=\overset{\circ}{19}$

$\therefore$ El residuo es cero.

SISTEMA DE ECUACIONES



DEFINICIÓN

Es el conjunto formado por dos o más ecuaciones en donde intervienen dos o más incógnitas.

Ejemplos:

- $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$
  $x + 2y - 7 = 0$
- $x^2 + y - 2 = 0$
  $xy - 2x = 0$

Solución de un sistema

Es aquella solución numérica correspondiente a las incógnitas que verifica cada una de las ecuaciones en forma simultánea.
Ejemplo:

$$\begin{matrix} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{matrix}$$

Las colecciones numéricas que verifican a las ecuaciones en forma simultánea son: (2; 3), (3; 2) ⇒ 2 soluciones.

- Si: $x = 2 \wedge y = 3 \Rightarrow (2)(3) = 6$
  $2 + 3 = 5$
- Si: $x = 3 \wedge y = 2 \Rightarrow (3)(2) = 6$
  $3 + 2 = 5$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

De la representación general:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow CS = \{(m; n)\}$$

(m: valor de x; n: valor de y)

REGLA DE CRAMER (método de los determinantes)

Δs = Determinante del sistema = $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Δx = Determinante respecto a la incógnita x = $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$

Δy = Determinante respecto a la incógnita y = $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$

Los valores de x e y están dados por las siguientes relaciones:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s};\ y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

Ejemplo: examen de admisión UNI 2002-II (matemática)

Al resolver, en el conjunto de los números complejos, el sistema:

$$\begin{matrix} (1 + i)Z - W = -1 - i \\ 2iZ + (1 - i)W = i \end{matrix}$$

El valor de $\frac{Z}{W}$ es:

Nota

También se pueden formar sistemas de ecuaciones con EXPRESIONES MATEMÁTICAS, estas expresiones deben estar bien definidas.

$$\begin{matrix} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 7 \\ x - y = 49 \end{matrix}$$

Expresiones matemáticas $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ \wedge \\ x^y - y \end{cases}$

Recuerde

- A la agrupación de todas las soluciones se denomina: CONJUNTO SOLUCIÓN (CS) del sistema.
  Del ejemplo mostrado su conjunto solución sería:

  CS = {(2; 3), (3; 2)}

- Los SISTEMAS EQUIVALENTES son aquellos sistemas que presentándose de diferentes formas aceptan las mismas soluciones o tienen el mismo conjunto solución.

  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \wedge \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

  Los sistemas son EQUIVALENTES, ya que poseen el mismo conjunto solución:
  CS = {(3;2)}



Atención

La solución de un sistema de ecuaciones también se puede resolver en el conjunto de los números complejos ℂ.

Resolución:

- Según la regla de Cramer determinamos:

Δs : determinante del sistema $= \begin{vmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{vmatrix} = (1+i)(1-i) - 2i(-1) = 2(1+i)$

Δz : determinante respecto a la incógnita Z $= \begin{vmatrix} -1-i & -1 \\ i & 1-i \end{vmatrix} = i - 2$

Δw : determinante respecto a la incógnita W $= \begin{vmatrix} 1+i & -1-i \\ 2i & i \end{vmatrix} = 3(i-1)$

- Los valores de Z y W estarán dados por las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} Z = \dfrac{\Delta z}{\Delta s} \\ W = \dfrac{\Delta w}{\Delta s} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{z}{w} = \left[\dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right]\left[\dfrac{\Delta s}{\Delta w}\right] = \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \dfrac{i-2}{3(i-1)} = \dfrac{i-2}{3(i-1)} \dfrac{(-1-i)}{(-1-i)} \begin{array}{l}\rightarrow \text{conjugado} \\ \rightarrow \text{conjugado}\end{array} \\ = -\dfrac{(i + i^2 - 2 - 2i)}{-3(i^2-1)} = \dfrac{-(i-1-2-2i)}{-3(-1-1)} = \dfrac{3+i}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{6} \end{array}$$

Estudios de las raíces del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

A) El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (solución única) Si: $\Delta s \neq 0$

B) El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (más de una solución o infinitas soluciones) Si: $\Delta s = 0$ y $\Delta x = \Delta y = 0$

C) El sistema es INCOMPATIBLE (absurdo, imposible, inconsistente, no admite solución, no tiene solución). Si: $\Delta s = 0$ y $\Delta x \neq 0 \vee \Delta y \neq 0$

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

De la representación general:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \quad CS = \{(m;\ n;\ p)\}$$

($m \uparrow$ valor x; $n \uparrow$ valor y; $p \uparrow$ valor z)

REGLA DE CRAMER (método de los determinantes)

$$\Delta s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Donde:

Δs: determinante respecto al sistema.

Δx: determinante respecto a la incógnita x.

Δy: determinante respecto a la incógnita y.

Δz: determinante respecto a la incógnita z.

Recuerda

$i^2 = -1$

i: unidad imaginaria



Recuerda

El conjugado de un complejo es aquel que solo cambia de signo la parte imaginaria.

$z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$





Atención

Emplearemos la regla de LA PLACE (menores complementarios) para hallar el determinante de 3.er orden.

I. Recuerda el cuadro de signos:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

II. Al elegir una línea (fila o columna) esta se denomina línea fija.

$$\Delta S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



La solución del sistema está dado por: $x=\frac{\Delta x}{\Delta s};\ y=\frac{\Delta y}{\Delta s};\ z=\frac{\Delta z}{\Delta s}$

Cálculo del determinante

En este caso puedes emplear cualquier método de los ya estudiados (…., el de la "estrella", etc); para este caso particular empleamos el de los MENORES COMPLEMENTARIOS.

Por ejemplo:

$$\Delta s=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=+a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-b_1a_2c_3+b_1a_3c_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2$$

Este procedimiento se empleará para el cálculo de: Δx, $\Delta y \wedge \Delta z$

$$\Delta s=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1$$

Atención

Cada elemento de la línea fija lo multiplicamos por el determinante que resulta de eliminar la fila y columna correspondientes al elemento.

1.er elemento de la línea fija: a_1

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

2° elemento de la línea fija: b_1

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}$$

3.er elemento de la línea fija: c_1

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$



Discusión de la solución

a) El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

Si: $\Delta s \neq 0$

b) El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones o más de una solución).

Si: $\Delta s = 0$ y $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0$

c) El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución, absurdo, imposible, inconsistente, etc.).

Si: $\Delta s = 0$ y $\Delta x\neq 0;\ \Delta y\neq 0;\ \Delta z\neq 0$

Ejemplo: examen de admisión UNI 2008-I (matemática).

La función polinomial:

$F(x;y;z)=((x-y)(y-z+3))^2+((z-y)(y-x+3))^4+(x+y+z-3)^2$

Tiene N raíces (x; y; z). Entonces N es igual a:

Resolución:

- El polinomio está formado por la suma de expresiones que contienen exponentes pares, en este caso para obtener sus ceros cada sumando lo igualamos a cero.

$$F(x;y;z)=0$$

$$(x-y)(y-z+3)=0\ \wedge\ (z-y)(y-x+3)=0\ \wedge\ x+y+z-3=0$$

$$(x-y=0\ \vee\ y-z+3=0)\ \wedge\ (z-y=0\ \vee\ y-x+3=0)\ \wedge\ x+y+z=3$$

Atención

Para aplicar esta regla, se recomienda tomar aquella línea (fila o columna) que tenga la mayor cantidad de ceros.



Observación

Los sistemas II y III son incompatibles, observa que las ecuaciones (2) y (3) cuando se suman se obtienen repetidamente:

$$\text{II}\quad \begin{array}{r} x - y = 0 \\ -x + y = 3 \\ \hline 0 = -3 \end{array} \ (+) \quad \text{(absurdo)}$$

$$\text{III}\quad \begin{array}{r} -y + z = 0 \\ y - z = -3 \\ \hline 0 = -3 \end{array} \ (+) \quad \text{(absurdo)}$$

Luego:
Se concluye:
$CS_{II} = \varnothing$; $CS_{III} = \varnothing$



- Generamos de está manera 4 sistemas de ecuaciones:

$$\text{I}\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y \qquad = 0 \\ \quad -y + z = 0 \end{cases} \vee \ \text{II}\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y \qquad = 0 \\ -x + y \quad = -3 \end{cases} \vee \ \text{III}\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad -y + z = 0 \\ \quad y - z = -3 \end{cases} \vee \ \text{IV}\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad y - z = -3 \\ -x + y \quad = -3 \end{cases}$$

Al analizar el sistema ten en cuenta: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 - (1 - (-1)) = -1 - 2 = -3$$

Línea fija

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$CS_I = \{(1; 1; 1)\}$

Sistema IV $\Rightarrow CS_{IV} = \{(2; -1; 2)\}$ ¡compruébalo!

Luego:

$CS = CS_I \cup CS_{II} \cup CS_{III} \cup CS_{IV} = \{(1; 1; 1)\} \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \{(2; -1; 2)\}$

$\Rightarrow CS = \{(1; 1; 1)\}; (2; -1; 2)\}$ tiene 2 raíces $(x; y; z)$ $\qquad \therefore\ N = 2$

Nota

- No hay un método general para resolver éste tipo de sistemas.
- Utilizando capítulos anteriores (producto notables, factorización, artificios, etc.) según como se presenta el problema lo resolveremos.
- Considerar también que hay problemas que se resuelven geométricamente.

SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

Es un conjunto de dos o más ecuaciones en el cual las expresiones matemáticas que intervienen en el sistema pueden ser algebraicas o no algebraicas.

Sistema algebraico: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y \ = 5 \end{cases}$ $\qquad$ Sistema no algebraico: $\begin{cases} \sqrt{x - y} = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Ejemplo:

Examen de admisión UNI 01-1 (matemática).

Dado el sistema: $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 & ...(1) \\ x + 2y \ = 7 & ...(2) \end{cases}$

Si $2y > x$, entonces el valor de $\frac{x}{y}$ es:

Resolución:

- De la condición del ejemplo:
  $2y > x$
  $2y - x > 0$ $\qquad$ ...(3)
- De (2) elevando al cuadrado:
  $x^2 + 4xy + 4y^2 = 49$ $\qquad$ ...(4)
- Reemplazando (1) en (4):
  $25 + 4xy = 49$
  $4xy = 24$ $\qquad$ ...(5)
- Restamos la ecuación (5) de (1):
  $x^2 - 4xy + 4y^2 = 1$
  $(x - 2y)^2 = 1$
  $(2y - x)^2 = 1$
- Considerando la condición (3) resulta:
  $2y - x = 1$ $\qquad$ ...(6)
- Con la ecuación (2) formamos nuestro sistema:
  $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$
  $\Rightarrow x = 3; y = 2$
- Nos piden: $\frac{x}{y}$; entonces su valor es: $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

Recuerda

- tcp: trinomio cuadrado perfecto.
  $(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{tcp}}$



Problemas resueltos



1 Resuelve:
$(x+1)(y+1)=72$ ...(1)
$(x+1)(z+1)=12$ ...(2)
$(y+1)(z+1)=54$ ...(3)

e indica la suma de los cuadrados de los valores de x.

Resolución:

De (1) y (3) tenemos: $\frac{x+1}{z+1}=\frac{72}{54}$ ...(4)

Multiplicamos (4) por (2):

$$(x+1)(z+1)\frac{(x+1)}{(z+1)}=\frac{72}{54}\cdot 12$$

$$(x+1)^2=16$$

$$x+1=\pm 4 \Rightarrow x+1=4 \vee x+1=-4$$

$$x=3 \vee x=-5$$

$\therefore$ Suma de cuadrados de x: $3^2+(-5)^2=34$

2 Resuelve el sistema e indica xy:

$\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{y}}=\frac{3}{2}$ ...(1)

$\frac{4}{\sqrt{y}}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}$ ...(2)

Resolución:

$$2\left(\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{y}}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{x}}-\frac{6}{\sqrt{y}}=3$$

$$5\left(\frac{4}{\sqrt{y}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=5\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{20}{\sqrt{y}}-\frac{10}{\sqrt{x}}=\frac{5}{3}$$

(+)

$$\frac{14}{\sqrt{y}}=\frac{14}{3}$$

$$\sqrt{y}=3 \Rightarrow y=9$$

Reemplazamos $\sqrt{y}=3$ en (1):

$\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{3}{3}=\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$ $\quad\therefore\quad xy=(4)(9)=36$

3 Resuelve el sistema y halla: $y-3$
$x+y+2z=21$ ...(1)
$x+2y+z=26$ ...(2)
$2x+y+z=21$ ...(3)

Resolución:

Sumamos las ecuaciones:
$4x+4y+4z=68$
$x+y+z=17$
Reemplazamos en la segunda ecuación:
$x+y+z+y=26$
$17+y=26 \Rightarrow y=9$

Nos piden:
$y-3=9-3=6$

4 Resuelve el siguiente sistema:
$x+y+z=2$
$2x-2y-z=2$
$x+2y-z=-3$

Indica: xyz

Resolución:

Del sistema sumamos (1) y (2):
$3x-y=4$ ...(α)

(2) – (3):
$x-4y=5$ ...(β)

Luego:
$4(\alpha)-(\beta) \Rightarrow 11x=11$
$x=1$

Reemplazamos en α:
$3(1)-y=4 \Rightarrow y=-1$

Reemplazando estos valores en (1), tenemos: $z=2$

Nos piden: $xyz=(1)(-1)(2)=-2$

5 Dado el sistema de ecuaciones:
$x+4y=12$
$5x+3y=26$

Calcula: $(x+y)^2$

Resolución:

Observamos que:

$$\Delta s=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-17;\ \Delta x=\begin{vmatrix}12 & 4\\ 26 & 3\end{vmatrix}=-68;\ \Delta y=\begin{vmatrix}1 & 12\\ 5 & 26\end{vmatrix}=-34$$

Luego:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta s} \Rightarrow x=\frac{-68}{-17}=4 \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta s} \Rightarrow y=\frac{-34}{-17}=2$$

$CS=\{(4;2)\}$

Piden: $(x+y)^2=(4+2)^2=36$

6 Si el sistema:
$2x+3y=m+1$
$4x+5y=6$
tiene soluciones positivas, indica los valores de m.

Resolución:

$2x+3y=m+1$ ...(1)
$4x+5y=6$ ...(2)

La ecuación (1) por 2:

$$\left.\begin{aligned}4x+6y&=2m+2\\ 4x+5y&=6\end{aligned}\right\}\downarrow(-)$$

$$y=2m-4$$

Reemplazamos $y = 2m - 4$ en (1):

$$2x + 3(2m - 4) = m + 1$$
$$2x + 6m - 12 = m + 1$$
$$2x = -5m + 13 \Rightarrow x = \frac{-5m + 13}{2}$$

Como $x > 0 \quad \wedge \quad y > 0$, entonces:

$$\frac{-5m + 13}{2} > 0 \qquad \wedge \qquad 2m - 4 > 0$$
$$m > 2$$

$$-5m + 13 > 0$$
$$13 > 5m$$
$$\frac{13}{5} > m$$
$$\therefore\ 2 < m < \frac{13}{5}$$

7 Halla x en el sistema:

$y + 3x = a$
$x - 3z = -2a$
$3y + z = -a$

Resolución:

De la primera ecuación: $y = a - 3x$

De la segunda ecuación: $z = \dfrac{x + 2a}{3}$

Reemplazamos estos valores en la tercera ecuación:

$$3(a - 3x) + \frac{x + 2a}{3} = -a$$
$$9a - 27x + x + 2a = -3a$$
$$11a - 26x = -3a$$
$$x = \frac{14a}{26} \Rightarrow x = \frac{7a}{13}$$

8 Halla el menor valor de $x + y$, luego de resolver el sistema:

$2x^2 + 5xy - 10y^2 = 0$
$12y^2 - xy - 72 = 0$

Resolución:

Sumamos las ecuaciones:

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = 72$$
$$(x + y)^2 = 6^2$$

$x + y = 6 \ \vee \ x + y = -6$

$\therefore (x + y)_{mín.} = -6$

9 Resuelve:

$x(y + z) + z^2 = 14$
$y(z + x) + x^2 = 9$
$z(x + y) + y^2 = 13$

Indica el máximo valor de $x + y + z$.

Resolución:

Utilizamos la propiedad distributiva en cada ecuación:

$xy + xz + z^2 = 14$ ...(1)
$yz + yx + x^2 = 9$ ...(2)
$zx + zy + y^2 = 13$ ...(3)

Sumando (1), (2) y (3) se tiene:

$(x + y + z)^2 = 36$

$x + y + z = 6 \ \vee \ x + y + z = -6$

$\therefore (x + y + z)_{máx.} = 6$

10 Resuelve el sistema y da como respuesta: $(y - x)$

$x + y = 2^x$
$3^x(x + y) = 216$

Resolución:

Del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2^x & ...(1) \\ 3^x(x + y) = 216 & ...(2) \end{cases}$$

Reemplazamos(1) en (2):

$$3^x \cdot 2^x = 216$$
$$6^x = 216 = 6^3$$

Por comparación: $x = 3$

Reemplazamos $x = 3$ en (1):

$3 + y = 2^3 \Rightarrow y = 5$

$\therefore y - x = 5 - 3 = 2$

11 Juan y Pedro pueden pintar un auditorio en 5 días, Juan y Carlos lo pueden hacer en 6 días, y Pedro con Carlos lo puede hacer en 5 días. ¿En cuánto tiempo puede Pedro pintar el auditorio?

Resolución:

Se denota como:

J: el número de días en que Juan pinta el auditorio.
P: el número de días en que Pedro pinta el auditorio.
C: el número de días en que Carlos pinta el auditorio.

Del enunciado:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{J} + \dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{5} & ...(1) \\ \dfrac{1}{J} + \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{6} & ...(2) \\ \dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{5} & ...(3) \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones: (1) + (2) + (3):

$$\underbrace{\frac{1}{J} + \frac{1}{C}}_{\frac{1}{6}} + \frac{1}{P} = \frac{17}{60} \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{17}{60} - \frac{1}{6} = \frac{7}{60}$$

$$\Rightarrow P = \frac{60}{7} \Rightarrow P = 8\frac{4}{7}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO PLANTEO DE ECUACIONES



ECUACIÓN

Se denomina de esta manera a aquella igualdad que se obtiene al reemplazar por cero a "y" de una función cuadrática.

Función cuadrática: $ax^2 + bx + c = y$ Ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES (TEOREMA DE VIÉTTE)

Asumiendo que x_1 y x_2 son raíces de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, se puede establecer con ellas las siguientes propiedades:

Suma de raíces (S) $= x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Raíces simétricas (opuestas) $= x_1 + x_2 = 0$

Producto de raíces (P) $= x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Raíces recíprocas $= x_1 \cdot x_2 = 1$

Diferencia de raíces (D) $= x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

Ejemplo:

De la siguiente ecuación determina el valor de k para que una raíz sea dos veces más que la otra:

$$3x^2 - 24x + 8k - 4 = 0$$

Resolución:

- De la suma de raíces obtenemos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-24)}{3}$$

$$x_1 + x_2 = 8 \qquad ...(1)$$

- Por dato del problema:

$$x_1 = 2x_2 + x_2$$

$$x_1 = 3x_2 \qquad ...(2)$$

- Reemplazando (2) en (1):

$$3x_2 + x_2 = 8$$

$$x_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 6$$

- Del producto de raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{8k - 4}{3}$$

$$6 \cdot 2 = \frac{8k - 4}{3}$$

$$\Rightarrow k = 5$$

Propiedades particulares

Dadas las ecuaciones cuadráticas:

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ $\qquad$ $px^2 + qx + r = 0$; $p \neq 0$

Si tienen las mismas soluciones, se cumple:

A) Son equivalentes, luego: $\dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{r}$

B) Tienen una raíz común: teorema de Bezout: $(cp - ar)^2 = (aq - bp)(br - cq)$

El valor de la raíz común se determina así: $x = \dfrac{ar - cp}{bp - aq}$

Recuerda

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

a: coeficiente principal
ax^2: término cuadrático
bx: término lineal
c: término independiente
x: incógnita



Observación

La naturaleza de los raíces se determina analizando el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$

- Raíces reales y distintas:

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$

- Raíces imaginarias y conjugadas:

$\Delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m + ni \\ x_2 = m - ni \end{cases}$

- Raíces reales e iguales (raíz real doble):

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{b}{2a}$

Nota

Propiedades adicionales

- Por la identidad de Legendre se obtiene una relación entre las raíces:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

- Del mismo modo con un binomio al cuadrado:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

- También con un binomio al cubo:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1 x_2$$

Ejemplo:

Sea las ecuaciones equivalentes:

$(a^2 - b^2)x^2 + (ab + 1)x + 7 = 0$

$(a - b)x^2 + x + 1 = 0; a \neq b$

Determina: $(a - 4b)^6$

Resolución:

Por ser ecuaciones equivalentes:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{ab + 1}{1} = \frac{7}{1}$$

(1) relaciona el primer y el tercer miembro; (2) relaciona el segundo y el tercero.

- De (1): $a^2 - b^2 = 7(a - b)$
  $\Rightarrow (a + b)(a - b) = 7(a - b)$
  $\Rightarrow a + b = 7$ ...(I)
- De (2): $ab + 1 = 7$
  $\Rightarrow ab = 6$ ...(II)
- De (I) y (II): $a = 6 \wedge b = 1$
- Nos piden: $(a - 4b)^6 = (6 - 4(1))^6 = 2^6 = 6^4$

Atención

A la condición de compatibilidad:

$(cp - ar)^2 = (aq - bp)(br - cq)$

Se le conoce como:

BEZOUTIANA

El valor de la raíz común se determina así:

De las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$
$px^2 + qx + r = 0$ } Eliminamos x^2

$apx^2 + bpx + cp = 0$ (I)
$apx^2 + aqx + ar = 0$ (II)

Restando (II) de (I):
$x(bp - aq) + (cp - ar) = 0$

$$x = \frac{ar - cp}{bp - aq}$$



Observación

Si:
Suma de raíces = S
Producto de raíces = P

Obtenemos una ecuación cuadrática más simplificada:

$x^2 - Sx + P = 0$



FORMACIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

si: x_1 y x_2 son raíces de una ecuación de segundo grado, entonces esta ecuación es de la forma:

$$x^2 - (\text{suma de raíces})x + \text{producto de raíces} = 0$$

Ejemplos:

1 Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
Los coeficientes a, b y c forman una progresión aritmética, si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación y cumplen:
$a + b + c = 3(r_1 + r_2)$
$b + 7 = r_1r_2$
Halla: abc

Resolución:

Si los coeficientes forman una progresión aritmética se cumplirá:

$b = \frac{a + c}{2} \Rightarrow 2b = a + c$ ...(1)

Luego por propiedad sabemos:

$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$; $r_1r_2 = \frac{c}{a}$

Por dato:

$a + b + c = 3(r_1 + r_2) = -\frac{3b}{a}$

De (1) tenemos:

$3b = -\frac{3b}{a} \Rightarrow a = -1$

Del segundo dato:

$b + 7 = r_1r_2 = \frac{c}{a} = -c$

$b = -7 - c$ ...(2)

Reemplazando en (1):

$2(-c - 7) = -1 + c$
$-2c - 14 = -1 + c$
$-3c = 13$
$c = -\frac{13}{3}$

Reemplazando en (2):

$b = -7 - c$

$b = -7 + \frac{13}{3}$

$b = -\frac{8}{3}$

Luego nos piden:

$abc = (-1)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{13}{3}\right)$

$abc = -\frac{104}{9}$

2 Forma una ecuación cuadrática de raíces y_1; y_2 sabiendo que:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1} ; y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

Donde:
x_1 y x_2 son raíces de la ecuación: $3x^2 - 6x + 15 = 0$

Resolución:

- De la ecuación cuadrática:
  $3x^2 - 6x + 15 = 0$
- Según las propiedades de las raíces:
  $x_1 + x_2 = 2$ ...(1)
  $x_1x_2 = 5$ ...(2)
- Reemplazando (1) y (2) en las condiciones:
  $y_1 = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1} = \frac{2 + 2}{2 + 5 + 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

  $y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{2}{5}$

- Con estas nuevas raíces formamos la nueva ecuación cuadrática:
  $y^2 - Sy + P = 0$

  $y^2 - \frac{9}{10}y + \frac{1}{5} = 0$

  $10y^2 - 9y + 2 = 0$



PLANTEO DE ECUACIONES

Sobre edades

Ejemplo:

Miriam es 7 años meno que su hermana y la suma de sus inversos de sus edades da 9/8. Determina ambas edades.

Resolución:

- Denotamos por:
  x: edad de su hermana.
  x – 7: edad de Miriam.

- Por dato del ejemplo:
  "Suma de inversas edades es 9/8":
  $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-7}=\frac{9}{8}$$

- Reduciendo la ecuación obtenemos:
  $(9x-7)(x-8)=0$
  $x=\frac{7}{9}$ (no cumple) $\vee$ $x=8$ (✓)

- Las edades de las hermanas serán:
  Miriam $= x-7=8-7=1$ año
  Hermana $= x = 8$ años

Nota

- Miriam es 7 años menos que su hermana
  $M = \underbrace{\text{hermana}}_{x} - 7$
  $M = x - 7$
- Suma de inversas de dos números:
  $\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}$

Sobre números consecutivos

Ejemplo:

Examen de admisión UNI: 99-I (matemática)

Se tienen dos enteros positivos y consecutivos, tales que entre sus cubos hay 720 enteros. Determina el mayor entero impar comprendido entre dichos cubos.

Resolución:

- Según el enunciado:
  $N^3, \underbrace{\ldots,}_{720\text{ números}} (N+1)^3$

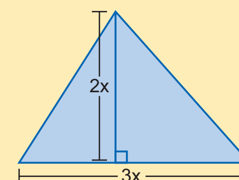
- Luego, sabemos:
  $$\frac{(N+1)^3-N^3}{1}-1=720$$

- Desarrollamos la diferencia de cubos:
  $$(N+1-N)((N+1)^2+N(N+1)+N^2)=721$$
  $$N^2+2N+1+N^2+N+N^2=721$$

- Reducimos términos semejantes:
  $$3N^2+3N+1=721$$
  $$N(N+1)=15\times 16$$
  $$N=15$$

- El mayor número elevado al cubo será:
  $(N+1)^3=16^3=4096$

  Por lo tanto, el mayor entero impar comprendido entre dichos cubos será: 4095



Observación

Representación de dos números enteros positivos y consecutivos:

N y N + 1

Sobre áreas

Ejemplo:

Un triángulo tiene el doble de la altura de un rectángulo. La base del triángulo es los 3/2 de su altura. La base del rectángulo mide el triple de la base del triángulo. El área del triángulo es 864 m^2 menos que el área del rectángulo. Determina el área de cada figura.

Resolución:

- El enunciado nos advierte:
  $$\underbrace{\text{Área de la región triangular}}_{\text{Área}} = \underbrace{\text{Área de la región cuadrangular}}_{\text{Área}} - 864m^2$$

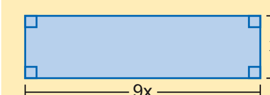
  $$\frac{(2x)(3x)}{2}=(9x)(x)-864$$
  $$3x^2=9x^2-864$$
  $$6x^2=864$$
  $$x^2=144$$
  $$(x+12)(x-12)=0 \Rightarrow x+12=0 \quad \vee \quad x-12=0$$
  $$x=-12 \ \vee \ x=12$$
  (No cumple)

- Nos piden:
  Área de la región triangular $= 3x^2 = 3(144) = 432\ m^2$
  Área de la región cuadrangular $= 9x^2 = 9(144) = 1296\ m^2$

Atención

Se muestran las regiones triangular y rectangular según como indica el enunciado:

Triángulo
Altura = 2x; base = $\frac{3}{2}(2x)=3x$
Área = $\frac{(2x)(3x)}{2}$



Rectángulo:
Altura = x; base = 3(3x) = 9x

Área = (9x)(x)



Problemas resueltos

1 Halla la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación, sabiendo que sus raíces son recíprocas.
$(2k+2)x^2+(4-4k)x+k-2=0$

Resolución:

Por dato sabemos que las raíces son recíprocas, es decir: $x_1x_2=1$
Hallamos la suma de raíces:

$$x_1+x_2=\frac{-(4-4k)}{2k+2}$$

Producto de raíces:

$$\frac{k-2}{2k+2}=1$$

$$k-2=2k+2\Rightarrow k=-4$$

Luego:

$$x_1+x_2=\frac{-(4-4(-4))}{2(-4)+2}=\frac{-(20)}{-6}=\frac{10}{3}$$

Entonces:

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)^2=x_1^2+x_2^2+2(1)$$

$$\frac{100}{9}-2=x_1^2+x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=\frac{82}{9}$$

2 Sea: $3x^2+2x+m=0$ de raíces x_1 y x_2, halla el valor de m, si:
$(3x_1+2)^{-1}+(3x_2+2)^{-1}=-\frac{2}{9}$

Resolución:

De la ecuación:

$$x_1+x_2=-\frac{2}{3}\ \wedge\ x_1x_2=\frac{m}{3}$$

En el dato:

$$(3x_1+2)^{-1}+(3x_2+2)^{-1}=-\frac{2}{9}$$

Efectuando y resolviendo:

$$\frac{3\left(-\frac{2}{3}\right)+4}{9\left(\frac{m}{3}\right)+6\left(-\frac{2}{3}\right)+4}=-\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3m}=-\frac{2}{9}\quad \therefore\ m=-3$$

3 Si: $Ax^2-(A+8)x+(5A+2)=0$
Sabiendo que la diferencia de raíces es uno; halla A.

Resolución:

Sean las raíces: x_1 y x_2
Dato: $x_1-x_2=1$

Recuerda: $x_1-x_2=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

En el problema:

$$\sqrt{(A+8)^2-4(A)(5A+2)}=A$$

Efectuando, tenemos:
$5A^2-2A-16=0$

Por aspa simple:
$(5A+8)(A-2)=0$

$$\Rightarrow A=-\frac{8}{5}\ \vee\ A=2$$

4 En la ecuación:
$(m+1)x^2+(2-8m)x+2(m-1)=0$
Las raíces son simétricas. Halla el valor de m.

Resolución:

Dato: raíces simétricas; luego:
$x_1+x_2=0$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0\Rightarrow b=0$$

Luego:
$b=2-8m=0$

$$\Rightarrow 2-8m=0\Rightarrow m=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

5 Halla n si las raíces son iguales:
$(n+2)x^2-6nx+9=0$

Resolución:

Si las raíces son iguales: $\Rightarrow \Delta=0$

$$\Delta=(-6n)^2-4(n+2)\,.\,9=0$$
$$36n^2-36(n+2)=0$$
$$n^2-(n+2)=0$$
$$n^2-n-2=0$$

n ╳ -2
n ╳ $+1$

$(n-2)(n+1)=0$
$\Rightarrow n-2=0\ \vee\ n+1=0$
$n=2\ \vee\ n=-1$
$\therefore$ CS = {–1; 2}

6 Forma la ecuación de segundo grado con coeficientes reales si una de sus raíces es: $x_1=2+5i$

Resolución:

Raíces: $x_1=2+5i\Rightarrow x_2=2-5i$
Luego:
$S=x_1+x_2=4\ \wedge\ P=(2+5i)(2-5i)$
$P=2^2-25i^2=29$

Reemplazando en: $x^2-Sx+P=0$
$\therefore\ x^2-4x+29=0$

7 Forma la ecuación de segundo grado de raíces:
$x_1=-6+\sqrt{2}\ \wedge\ x_2=-6-\sqrt{2}$

Resolución:

$x_1+x_2=-12$
$x_1\,.\,x_2=(-6+\sqrt{2})(-6-\sqrt{2})$
$=(-6)^2-(\sqrt{2})^2$
$=36-2=34$

Luego:
$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$
La ecuación de 2.° grado es:
$\therefore\ x^2+12x+34=0$

8 Si las ecuaciones:
$(2m+1)x^2-(3m-1)x+2=0$
$(n+2)x^2-(2n+1)x-1=0$
presentan las mismas raíces, indica 2mn.

Resolución:

$(2m+1)x^2-(3m-1)x+2=0$
$(n+2)x^2-(2n+1)x-1=0$

Las ecuaciones son equivalentes, se cumple:

$$\underbrace{\frac{2m+1}{n+2}}_{(I)}=\underbrace{\frac{3m-1}{2n+1}}_{(II)}=\underbrace{-2}_{(III)}$$

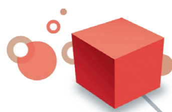
De (I) y (III):
$2m+1=-2n-4$
$m+n=\frac{-5}{2}$ ...(α)

De (II) y (III):
$3m-1=-4n-2$
$3m+4n=-1$ ...(β)

Resolviendo (α) y (β):

$$m=-9\ \wedge\ n=\frac{13}{2}$$

Nos piden: $2mn=2(-9)\left(\frac{13}{2}\right)=-117$



UNIDAD 4

INECUACIONES

Desigualdad

Es una relación de orden que se establece entre dos números reales que tienen diferente valor, es decir:

$$a; b \in \mathbb{R} / a \neq b \Rightarrow a > b \vee a < b$$

INECUACIÓN

Es aquella relación de orden que se establece entre dos expresiones matemáticas de por lo menos una variable y que se satisface para un determinado conjunto de valores, y si no se satisface para ningún valor se dice que la inecuación es incompatible.

Siendo en forma general: $A(x; y; z...) \gtreqless B(x; y; z...)$

Donde A; B son expresiones matemáticas.

INECUACIÓN CUADRÁTICA

Forma general: $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$; $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$; $a \neq 0$

Para dar solución a este tipo de inecuaciones se deberá analizar el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$; considerando para ello su coeficiente principal positivo.

I. **Primer caso.** Si: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Aquí, el polinomio $ax^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto (tcp).

Ejemplos:

Sea: $ax^2 + bx + c = x^2 - 18x + 81$; donde $\Delta = (-18)^2 - 4(1)(81) = 0$

Factorizando: $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$, luego:

- Si $(x - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow CS = \mathbb{R}$
- Si $(x - 9)^2 \leq 0 \Rightarrow CS = \{9\}$
- Si $(x - 9)^2 > 0 \Rightarrow CS = \mathbb{R} - \{9\}$
- Si $(x - 9)^2 < 0 \Rightarrow CS = \varnothing$

II. **Segundo caso.** Si: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Aquí, el polinomio $ax^2 + bx + c$ es factorizable en $\mathbb{R}$.
En este caso se utilizará el criterio de los puntos críticos.

Ejemplos:

1. Determina el conjunto solución de:

$x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{3}x + \sqrt{6} \geq 0$

Resolución:

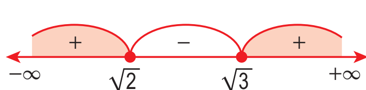
$\Delta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4(1)\sqrt{6} > 0$

$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} \geq 0$

x $-\sqrt{3}$

x $-\sqrt{2}$

$(x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2}) \geq 0$



$CS = \langle -\infty; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}; +\infty\rangle$

2. Determina el conjunto solución de:

$x^2 - 5x - 6 < 0$

Resolución:

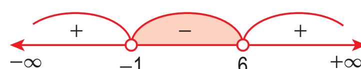
$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(-6) > 0$

$x^2 - 5x - 6 < 0$

x -6

x $+1$

$(x - 6)(x + 1) < 0$



$CS = \langle -1; 6\rangle$



Atención

La forma general de una inecuación es:

$F(x) \gtreqless 0$

"F" es una expresión matemática de variable x.
Dependiendo de "F" las inecuaciones pueden ser:

$F(x) \gtreqless 0$	Inecuación
$5x^3 - x^2 + 7 < 0$	Polinomial
$\frac{2x}{x+7} + \frac{10}{3x} < 0$	Fraccionaria
$\sqrt{5x+7} + 9x > 0$	Irracional
$\log^2 x + 7 < 10$	Logarítmica
$10^x - 10000 > 0$	Exponencial
$\tan x + 1 \geq 0$	Trigonométrica

Recuerda

- **Intervalos**
  Es aquel subconjunto de los números reales que define un conjunto de valores entre dos límites, inferior y superior.
- La **solución** de una inecuación es aquel valor (o valores) de la incógnita (o incógnitas) que verifican la inecuación.
  Así, en: $3x + 1 > x + 2$ una solución en forma particular es $x = 4$, pues:
  $3(4) + 1 > 4 + 2$
  $13 > 6$ (verdadero)
- El conjunto solución (CS) agrupa todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación.



Recuerda

- Teorema del trinomio positivo:

$ax^2 + bx + c = a\underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}_{+}$

Si: $b^2 - 4ac < 0 \wedge a > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{ax^2 + bx + c > 0}$; $\forall x \in \mathbb{R}$



Nota

I. Dados: $a_1; a_2; a_3; ...; a_n \in \mathbb{R}$
Se cumple:

$MP \geq MA \geq MG \geq MH$

Donde:
MP: media ponderada
MA: media aritmética
MG: media geométrica
MH: media armónica

$MP = \frac{\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + a_3^n + ... + a_n^n}}{n}$

$MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

$MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$

$MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$

II. Si:

$a_n = \left\{\frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_p^n}{p}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow a_\alpha \leq a_\beta;\ \forall \alpha < \beta$

III. Si: $x_1; x_2; ...; x_n \in \mathbb{R}^+ \wedge n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_p^n}{p} \geqslant \left[\frac{x_1 + x_2 + ... + x_p}{p}\right]^n$

IV. Considera también:

$0 < ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$

III. Tercer caso. Si: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Aquí, emplearemos el teorema del trinomio positivo.

Ejemplo:

- $3x^2 + 5x + 10 > 0$; coeficiente principal: $a = 3 > 0$, discriminante $\Delta = 5^2 - 4(3)(10) < 0$ $\Rightarrow 3x^2 + 5x + 10 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow CS = \mathbb{R}$
- $3x^2 - 2x + 7 > 0$ $\quad a = 3 > 0 \wedge \Delta = (-2)^2 - 4(3)(7) < 0s$ $\Rightarrow CS = \mathbb{R}$
- $2x^2 + x + 10 \geq 0$ $\quad a = 2 > 0 \wedge \Delta = 1^2 - 4(1)(4) < 0$ $\Rightarrow CS = \mathbb{R}$
- $x^2 + x + 4 < 0$ $\quad a = 1 > 0 \wedge \Delta = 1^2 - 4(1)(4) < 0$
  Pero: $x^2 + x + 4 < 0$ $\Rightarrow CS = \varnothing$
- $2x^2 + 3x + 15 \leq 0$ $\quad a = 2 > 0 \wedge \Delta = 3^2 - 4(2)(15) < 0$
  Pero: $2x^2 + 3x + 15 \leq 0$ $\Rightarrow CS = \varnothing$

INECUACIÓN DE GRADO SUPERIOR

Una inecuación polinomial de grado superior en una variable presenta la siguiente forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n \gtreqless 0$$

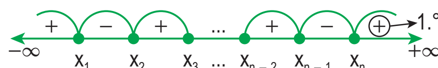
Donde los coeficientes del polinomio son números reales con $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para determinar el conjunto solución de este tipo de inecuaciones emplearemos el método de los puntos críticos.

Si: $x_1; x_2; x_3; ...; x_n$ son las raíces reales del polinomio, entonces:

$$a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) ... (x - x_n) \gtreqless 0$$

Donde a_0 debe ser positivo, si es negativo se le multiplica por (-1). Se ordena en la recta numérica en forma creciente, luego se obtiene el esquema gráfico:



Si la desigualdad tiene los sentidos:

Mayor $>$ 0, Mayor igual $\geq$ 0 } Elegiremos las zonas (+)

Menor $<$ 0, Menor igual $\leq$ 0 } Elegiremos las zonas (–)

Ejemplos:

1 Determina el conjunto solución de: $-x^3 + 4x \leq 0$

Resolución:

Como el coeficiente principal del polinomio es negativo, multiplicamos a ambos miembros por –1 con lo cual cambia de sentido la desigualdad, luego factorizamos.

$x^3 - 4x \geq 0$
$x(x^2 - 4) \geq 0$
$x(x + 2)(x - 2) \geq 0$

(Recta numérica: – en $\langle -\infty; -2\rangle$, + en $[-2; 0]$, – en $[0; 2]$, + en $[2; +\infty\rangle$; puntos –2, 0, 2)

El conjunto solución será.

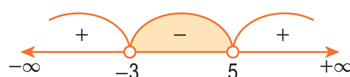
$CS = [-2; 0] \cup [2; +\infty\rangle$

2 Determina el conjunto solución de:
$(x-2)^8(x-5)(x+3)^7(x-9)^6 < 0$

Resolución:
La desigualdad se puede escribir como:
$(x-2)^8(x-5)(x+3)^6(x+3)(x-9)^6 < 0$

Cancelando los factores de exponente par, tendríamos $x = 2$; $x = -3$ y $x = 9$ que son valores que anulan a sus factores respectivos y si reemplazamos en la inecuación original obtendríamos para cada caso el absurdo $(0 > 0)$ esto quiere decir que $x = 2$; $x = -3$ y $x = 9$ no se tiene que considerar en el conjunto solución.

La desigualdad queda como: $(x-5)(x+3) < 0$



- El conjunto solución será: $CS = \langle -3; 5\rangle - \{2\}$

INECUACIONES FRACCIONARIAS

Son aquellas inecuaciones donde por lo menos una incógnita se encuentra en el denominador.

Adopta la forma general: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \gtreqless 0$

Donde: P(x) y Q(x) son polinomios no nulos.

Para la solución; al factorizarse Q(x), sus puntos críticos se considerarán en sus intervalos respectivos "abiertos".

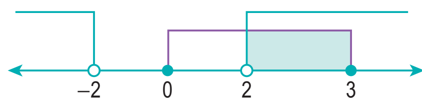
Ejemplos:

1. Enunciado del primer examen parcial CEPREUNI (concurso UNI 2002-I)
   Determina el dominio de la función f, definida por:
   $f(x) = \sqrt{3x - x^2} + \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-4}}$

   Resolución:
   - El dominio de la función lo determinan los valores admisibles de la variable x.

   $$3x - x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 4 > 0$$
   $$x(3-x) \geq 0 \quad \wedge \quad (x+2)(x-2) > 0$$
   $$x(x-3) \leq 0 \quad \wedge \quad (x+2)(x-2) > 0$$

   - En la recta numérica real:

   - El dominio de la función será: $Domf(x) = \langle 2; 3]$

2. Enunciado del examen final CEPREUNI (concurso UNI 1999-1)
   El valor máximo de la función:
   $$f(x) = \frac{a^2 - x^2}{b^2 + x^2} \text{ en los reales, es:}$$

Recuerda

- $\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}^-$, se cumple
  $a > b \Leftrightarrow am < bm$
- $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$ se establece la transitividad:
  Si: $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
- $\forall a; b; c$ y $d \in \mathbb{R}$, se verifica:
  $$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$



Observación

En caso que las raíces no sean reales, se tendrá que simplificar los factores de signos conocidos, para ello emplearemos los siguientes teoremas:

Teorema 1:

$(x-a)^{2n+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-a) \geq 0$

$n \in \mathbb{N}$; x; $a \in \mathbb{R}$

Teorema 2:

$(x-a)^{2n+1} \leq 0 \Leftrightarrow (x-a) \leq 0$

$n \in \mathbb{N}$; x; $a \in \mathbb{R}$

Así: $(x-3)^7 \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0$
$(x+10)^{11} \leq 0 \Leftrightarrow x + 10 \leq 0$



Atención

El método práctico para solucionar una inecuación fraccionaria es el de los **puntos críticos**.

Recuerda

- $\boxed{x^2 \geq 0}$; $\forall x \in \mathbb{R}$
- Si a y b son positivos

$$a \geq b \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$$

- $\forall a;\ b$ y $c \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$$c \leq b \leq a \Leftrightarrow cm \leq bm \leq am$$

- $\forall a;\ b$ y $c \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$$c \leq b \leq a \Leftrightarrow c \pm m \leq b \pm m \leq a \pm m$$

- Si a y b tienen el mismo signo:

$$a < x < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

- $\forall a;\ b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}$$

- $\forall a;\ b \in \mathbb{R}^-$ y $n \in \mathbb{Z}^+$; se cumple:

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$$

- $\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$$
$$a > b \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$$

- Si: $B > 0$

$$A^2 \leq B \Leftrightarrow -\sqrt{B} \leq A \leq \sqrt{B}$$

- Si: $B > 0$

$$A^2 > B \Leftrightarrow A < -\sqrt{B} \vee A > \sqrt{B}$$



Atención

Considera para el ejemplo:

- $(x-7)^3 = \underbrace{(x-7)^2}_{\geq 0}(x-7)$ $\Rightarrow$ se puede simplificar.
- $(x+9)^3 = \underbrace{(x+9)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x+9)}_{x \neq -9}$

Resolución:

- Sumando y restando "b^2" en el numerador de la fracción:

$$f(x) = \frac{a^2 + b^2 - (x^2 + b^2)}{b^2 + x^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 + x^2} - 1 \qquad \text{... (1)}$$

- Formamos f(x).
- Como se sabe que: $x^2 \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + b^2 \geq b^2$
- Invirtiendo los miembros de la desigualdad, estos también serán positivos: $\qquad 0 \leq \dfrac{1}{x^2 + b^2} \leq \dfrac{1}{b^2}$
- Multiplicamos por $a^2 + b^2$, $(a^2 + b^2 > 0)$

$$0 \leq \frac{a^2 + b^2}{x^2 + b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{b^2}$$

- Sumando –1 a todos los términos:

$$-1 \leq \underbrace{\frac{a^2 + b^2}{x^2 + b^2} - 1}_{(1)} \leq \frac{a^2 + b^2}{b^2} - 1$$

- Establecemos el intervalo final:

$$\underbrace{-1}_{\text{mín.}} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{a^2}{b^2}}_{\text{máx.}}$$

- El valor máximo de la función es:

$$f(x) = \frac{a^2}{b^2}$$

INECUACIONES IRRACIONALES

Es aquella desigualdad en la cual en uno de sus miembros destaca una expresión irracional.

Ejemplos: $\quad$ • $\sqrt{x^2 - x - 2} < 6 - x$ $\qquad$ • $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt[5]{x - 1} - \sqrt[9]{x^2 - 9} \geq 0$

Criterios de solución

A) Cuando los índices de los radicales son impares

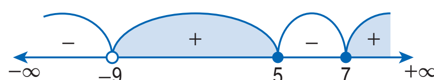
En este caso no es necesario realizar restricciones a la incógnita.

Ejemplo:

Determina el conjunto solución de: $\qquad \dfrac{(x-7)\sqrt[3]{x-5}}{x+9} \geq 0$

Resolución:

- Elevando al cubo miembro a miembro, resulta: $\qquad \dfrac{(x-7)^3(x-5)}{(x+9)^3} \geq 0$
- Esta desigualdad es equivalente a escribir: $\qquad \dfrac{(x-7)(x-5)}{x+9} \geq 0$



- Los valores admisibles de la variable x es: $CS = \langle -9; 5] \cup [7; +\infty\rangle$



B) Cuando los índices de los radicales son pares

En este caso sí es necesario realizar las restricciones a la incógnita.

Sigamos los siguientes pasos:

I. Garantizar la existencia (CVA) de la expresión irracional.
II. Transformar la inecuación en otra equivalente eliminando los radicales.
III. El conjunto solución será la intersección de los dos anteriores pasos.

Ejemplo:

Determina el conjunto solución de: $\sqrt{2x+11} > \frac{x+3}{2}$

Resolución:

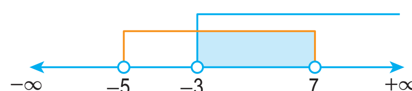
- Garantizamos el conjunto de valores admisibles: CVA: $2x + 11 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{11}{2}$ ...(1)
- Considerando los casos: 1.er caso: $\frac{x+3}{2} > 0 \Rightarrow x > -3$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2x+11}}_{+} > \underbrace{\frac{x+3}{2}}_{+}$$

- Elevamos al cuadrado miembro a miembro:

$$2x + 11 > \frac{(x+3)^2}{4} \wedge x > -3$$

$$(x-7)(x+5) < 0 \wedge x > -3$$



(A): $x \in \langle -3; 7 \rangle$

- Considerando el segundo caso:

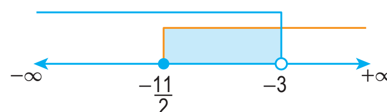
2.° caso: $\frac{x+3}{2} < 0 \Rightarrow x < -3$

$$\underbrace{\sqrt{2x+11}}_{+} > \underbrace{\frac{x+3}{2}}_{-}$$

- Resulta una desigualdad que es correcta:

$$x < -3 \wedge 2x + 11 \geq 0$$

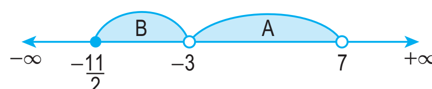
$$x < -3 \wedge x \geq -11/2$$



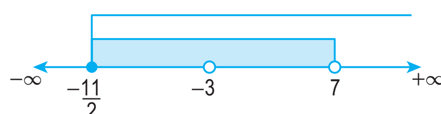
(B): $x \in \left[-\frac{11}{2}; -3\right\rangle$

- Realizamos la operación de conjuntos: 1.° $A \cup B$ y 2.° $CVA \cap (A \cup B)$

1.° $A \cup B$:



2.° $(1) \cap (A \cup B)$:
↑
CVA



$CS = x \in \left[-\frac{11}{2}; 7\right\rangle - \{-3\}$

Recuerda

- **El conjunto de valores admisibles** (CVA) es el conjunto de valores reales, que hacen posible que la desigualdad esté definida en el conjunto $\mathbb{R}$.
- **El conjunto solución** (CS) de la inecuación irracional, está contenido en el conjunto de valores admisibles (CVA).

CS ⊂ CVA



Recuerda

- Cuando se presenta de esta manera la desigualdad:

$$\sqrt{2x+11} > \frac{x+3}{2}$$

Se tienen que hacer las siguientes suposiciones:

1.er caso: $\frac{x+3}{2} > 0$ ... (A)

2.° caso: $\frac{x+3}{2} < 0$ ... (B)

Para resolverlos hacer $A \cup B$ y para determinar el conjunto solución (CS) tendrás que realizar la intersección de (1) con $(A \cup B)$:

$(1) \cap (A \cup B)$

Donde:
(1) es (CVA) $2x + 11 \geq 0$



Desigualdades e inecuaciones exponenciales

En este tipo de inecuaciones la incógnita se encuentra en el exponente, se presentan como:

I. Si la base (B) es mayor que la unidad: B > 1

$$B^{M(x)} \gtreqless B^{N(x)} \Rightarrow M(x) \gtreqless N(x)$$

"El sentido no cambia"

Ejemplo:
Determina el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt[x+1]{4^{x+3}} < \sqrt[x-1]{16^{2x+3}}$$

Resolución:

- La desigualdad se puede escribir como:

$$4^{\frac{x+3}{x+1}} < 16^{\frac{2x+3}{x-1}}$$

- Expresando 4 y 16 en base 2:

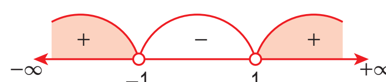
$$2^{\frac{2(x+3)}{x+1}} < 2^{\frac{4(2x+3)}{x-1}}$$

- Observamos que B = 2; (2 > 1), entonces:

$$\frac{2(x+3)}{x+1} < \frac{4(2x+3)}{x-1}$$

- Operando adecuadamente, obtenemos:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} > 0$$



- El conjunto solución será: $CS = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

Recuerda

- Exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

- El teorema del trinomio positivo
  $\forall x \in \mathbb{R}$ y a; b; c $\in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta < 0$$

- Producto de bases iguales, se suman los exponentes:

$$a^m . a^n . a^p = a^{m+n+p}$$

- División de bases iguales:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$



II. Si la base (B) es menor que la unidad, pero mayor que cero: 0 < B < 1

$$B^{M(x)} \gtreqless B^{N(x)} \Rightarrow M(x) \lesseqgtr N(x)$$

"Cambia el sentido"

Ejemplos:
1. Examen de admisión UNI 2002-I (Matemática)

Sea la inecuación:

$$\frac{a^{2(x-1)}a^{5-x}}{a^{5x}} < \frac{(a^{2x-1})^x}{a^{4x+2}} \text{ con } 0 < a < 1$$

Entonces, el menor valor que satisface la inecuación es:

Resolución:

- Reduciendo cada miembro de la desigualdad:

$$a^{2x-2+5-x-5x} < a^{2x2-x-4x-2}$$

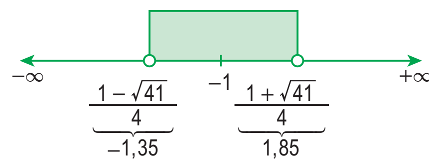
$$a^{3-4x} < a^{2x^2-5x-2}$$



- Como $0 < a < 1$ (dato), entonces:

$$3 - 4x > 2x^2 - 5x - 2$$
$$2x^2 - x - 5 < 0$$

- Factorizando el trinomio: $\left(x - \frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{41}}{4}\right) < 0$



Nota

Los valores aproximados de:

$\frac{1+\sqrt{41}}{4} \approx 1,85$

$\frac{1-\sqrt{41}}{4} \approx -1,35$

- El conjunto solución es:

$$CS = \left\langle \frac{1-\sqrt{41}}{4}; \frac{1+\sqrt{41}}{4} \right\rangle$$

- Luego, el menor valor entero que satisface la inecuación es: $\frac{1-\sqrt{41}}{4} < x < \frac{\sqrt{41}+1}{4}$

$$-1,35 < x < 1,85$$
$$x = -1$$

2. Examen de admisión UNI 2005-II (Matemática)

Resuelve: $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3-\sqrt{8}})^x \leq 34$

Resolución:

- Expresamos $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, luego: $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x \leq 34$
- Transformamos los radicales dobles a simples: $(\sqrt{2}+1)^x + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x} \leq 34$
- Haciendo el cambio de variable: $(\sqrt{2}+1)^x = m$
- Entonces la nueva desigualdad será: $m + \frac{1}{m} \leq 34$
- Dando la forma de un cuadrado perfecto: $m + 2 + \frac{1}{m} \leq 36$

$$\left(\sqrt{m} + \frac{1}{m}\right)^2 \leq 36$$
$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} \leq 6$$
$$\sqrt{m}^2 - 6\sqrt{m}^2 + 1 \leq 0$$

- Factorizamos la inecuación: $(\sqrt{m} - (3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{m} - (3 + 2\sqrt{2})) \leq 0$
- $\sqrt{m}$ ésta comprendido en el intervalo: $3 - 2\sqrt{2} \leq \sqrt{m} \leq 3 + 2\sqrt{2}$
- Reponemos la variable: $3 - 2\sqrt{2} \leq \sqrt{(\sqrt{2}+1)^x} \leq 3 + 2\sqrt{2}$
- Los nuevos extremos, con una base común: $\sqrt{2}+1$ $(\sqrt{2}+1)^{-2} \leq (\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}} \leq (\sqrt{2}+1)^2$
- Como $B > 1$ se cumple: $-2 \leq \frac{x}{2} \leq 2$

$$-4 \leq x \leq 4$$

- El conjunto solución es: $CS = \langle -4; 4 \rangle$

Atención

- De acuerdo a la teoría de radicales dobles:

$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$
↓ ↓
2+1 2.1

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
↓ ↓
2+1 2.1

- La expresión
$\sqrt{m}^2 - 6\sqrt{m} + 1 \leq 0$
Por fórmula general:
$\sqrt{m} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$
$\sqrt{m} = 3 \pm 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow \sqrt{m}^2 - 6\sqrt{m} + 1 \leq 0$
$(\sqrt{m} - (3 + 2\sqrt{2}))(\sqrt{m} - (3 - 2\sqrt{2})) \leq 0$



Problemas resueltos

1 Resuelve: $\dfrac{(2x+3)(5-x)\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[5]{7-x}\,.\sqrt[4]{x-6}} \geq 0$

Resolución:

$$\frac{(2x+3)(5-x)(\sqrt[3]{x+3})}{(\sqrt[5]{7-x})(\sqrt[4]{x-6})} \geq 0$$

Analizando:

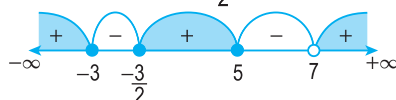
$x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6$ ...(S_1)

Luego:

$$\frac{(2x+3)(5-x)(x+3)}{(7-x)} \geq 0$$

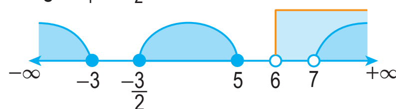
$(2x+3)(x-5)(x+3)(x-7) \geq 0$

Puntos críticos: -3; $-\frac{3}{2}$; 5 y 7



$x \in \langle -\infty; -3] \cup \left[-\frac{3}{2}; 5\right] \cup \langle 7;+\infty\rangle$ ...(S_2)

Luego $S_1 \cap S_2$:



$\therefore x > 7$

2 Si $x; y; z \in \mathbb{R}^+$, además, $x^3+y^3+z^3 \leq 81$, halla el máximo valor que adquiere λ si: $\lambda = x+y+z$

Resolución:

Si $x_1; x_2; ...; x_n \in \mathbb{R}^+ \wedge n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_p^n}{p} \geq \left(\frac{x_1+x_2+...+x_p}{p}\right)^n$$

En el problema: $x; y; z \in \mathbb{R}^+ \wedge n = 3$

$$\Rightarrow \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \quad ...(I)$$

Además: $81 \geq x^3+y^3+z^3$

Dividimos entre 3:

$$\frac{81}{3} \geq \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \quad ...(II)$$

De (I) $\wedge$ (II):

$$27 \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

$\underbrace{x+y+z}_{\lambda} \leq 9 \Rightarrow \lambda_{máx.} = 9$

3 Si $x; y; z \in \mathbb{R}^+$, tal que $x^2+y^2+z^2 = 8$, halla el mínimo valor de: $x^3+y^3+z^3$

Resolución:

Recordando:

$x_1; x_2; x_3; ..., x_p \in \mathbb{R}^+ \wedge n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall\ a_n = \left\{\frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_p^n}{p}\right\}^{\frac{1}{n}} \Rightarrow a_\alpha \leq a_\beta,\ \forall\ \alpha < \beta$$

En el problema:

$x; y; z \in \mathbb{R}^+$; $\alpha = 2 \wedge \beta = 3$

Se cumple:

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Del dato:

$$\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Al cubo:

$$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} \leq \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$

Piden: $(x^3+y^3+z^3)_{mín.} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}$

4 Resuelve: $16^{4x-3} \leq 8^{7x+1}$

Halla la suma de los valores enteros negativos que la satisfacen.

Resolución:

$16^{4x-3} \leq 8^{(7x+1)}$

$2^{4(4x-3)} \leq 2^{3(7x+1)}$

Recuerda:

Si: $a^x \leq a^y$; $a > 1$

$\Rightarrow x \leq y$

Luego:

$16x - 12 \leq 21x + 3$

$-15 \leq 5x \Rightarrow x \geq -3$

Nos piden la suma de valores negativos.

$\therefore -3 - 2 - 1 = -6$

5 Si M es un conjunto definido por:

$M = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x}\}$, entonces el conjunto M es:

Resolución:

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$x + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x \geq 0$

$x \geq -1 \qquad x \geq 1 \qquad x \geq 0$

Al intersectar tenemos: $x \geq 1$ ...(1)

La inecuación dada es: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x}$

Elevando al cuadrado:

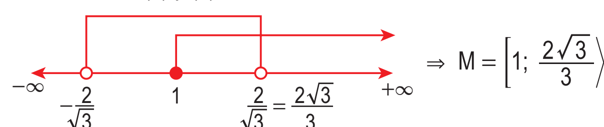
$x + 2\sqrt{x^2-1} < 3x$

$(2\sqrt{x^2-1})^2 < (x)^2$

$4(x^2-1) < x^2 \Rightarrow 3x^2 - 4 < 0$

$(\sqrt{3}x - 2)(\sqrt{3}x + 2) < 0$ ...(2)

Intersectando (1) y (2):



$\Rightarrow M = \left[1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\rangle$

FUNCIONES

DEFINICIÓN

Una función **f** es un conjunto de pares ordenados donde se cumple:

$$\text{Si: } (a; b) \in \mathbf{f} \wedge (a; c) \in \mathbf{f} \Rightarrow b = c$$

Ejemplo:

Identifica cuáles son funciones:
F = {(7; 5); (3; 4); (2; 1)}
G = {(4; 2); (6; 4); (4; 2), (3; 0}
H = {(2; 1); (2; 3); (3; 0)}
≠

Resolución:
- Observamos que F y G son funciones, H no lo es ya que a la misma primera componente 2 le corresponde diferentes valores.

Nota
Una **relación** es un subconjunto de pares ordenados de un determinado producto cartesiano.

Dominio

Es el conjunto que agrupa a todas las primeras componentes de los pares ordenados de la función.
Notación: Dom(f); Df

Rango

Es el conjunto que agrupa a todas las segundas componentes de los pares ordenados de la función.
Notación: Ran(f); Rf

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Una función **f** es de variable real si su dominio y rango están incluidos en el conjunto de los números reales.

$$\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \wedge \text{Ran}(f) \subseteq \mathbb{R}$$

Observación
Valor numérico de una función.
Es el valor que toma la función f(x) al evaluar $x \in \text{Dom}(f)$ en su regla de correspondencia.

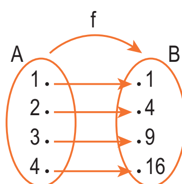


REGLA DE CORRESPONDENCIA

Es la relación que existe entre los elementos del dominio y el rango de una función.

y = f(x) se lee: y es función de x   Donde: **x** es una variable independiente
y es la variable dependiente

Ejemplo:
Sea f: A → B una función definida por el diagrama:



Se observa que:
f(1) = 1   f(2) = 4   f(3) = 9   f(4) = 16
Notamos que si $x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow \underbrace{f(x) = x^2}_{\text{Regla de correspondencia}}$

⇒ **f** queda definida: $f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in \text{Dom}(f) \wedge y = f(x)\}$

Ejemplo:
Determina el dominio y rango de $f(x) = \dfrac{3x - 2}{5}$, si $x \in [9; 19\rangle$

Resolución:
El dominio está indicado: $\text{Domf}(x) = [9; 19\rangle$
Para hallar el rango formamos la regla de corresponda $y = \dfrac{3x - 2}{5}$ apartir del dominio:

$$9 \leq x < 19$$
$$27 \leq 3x < 57$$
$$25 \leq 3x - 2 < 55$$
$$5 \leq \frac{3x - 2}{5} < 11$$
$$\therefore\ \text{Ran}(f) = [5; 11\rangle$$

GRÁFICAS DE FUNCIONES

Ejemplos:

1. Grafica la función:

$f(x) = x^2 - 2x + 2; x \in [1; 4]$

Resolución:

$f(x) = x^2 - 2x + 2$

Tabulando se tiene:

x	1	2	3	4
f(x)	1	2	5	10

2. Grafica la función:

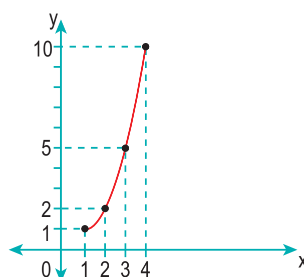
$f(x) = \dfrac{x - 1}{|x| + 1}$

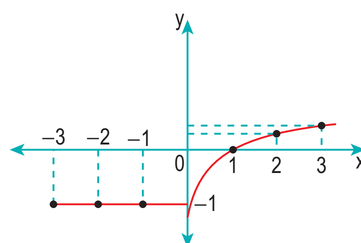
Resolución:

Tabulando se tiene:

x	–3	–2	–1	0	1/2	1	2	3
f(x)	–1	–1	–1	–1	–1/3	0	1/3	1/2

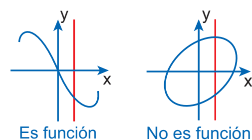
f(x) se obtiene ubicando uniendo los puntos tabulados:





Nota

Gráficamente:



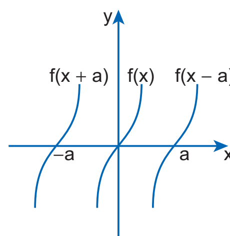
(Para que una gráfica sea función, la recta vertical la debe cortar en un punto).

Desplazamiento de gráficas:

A) Horizontal

Sea la función: $f(x) \Rightarrow f(x \pm a)$

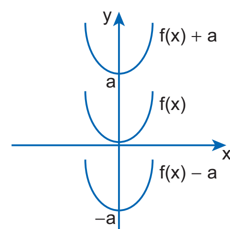
Se desplaza en el eje x:



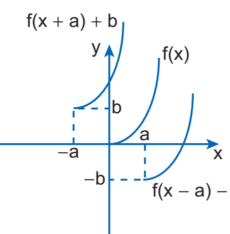
B) Vertical

Sea la función: $f(x) \Rightarrow f(x) \pm a$

Se desplaza en el eje y:



C) Horizontal - vertical



* a y b son números positivos

FUNCIONES ELEMENTALES

Son aquellas funciones especiales, las cuales nos servirán de apoyo para poder resolver funciones complicadas. Las más importantes son:

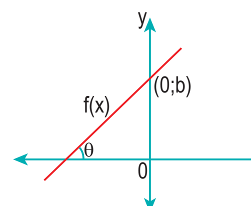
1. Función lineal (primer grado)

Es la función determinada por la siguiente regla de correspondencia:

$f(x) = mx + b$

Donde: $m \neq 0$

$m; b \in \mathbb{R}$



Dom(f)= $\mathbb{R}$

Ran(f) = $\mathbb{R}$

m = tanθ: pendiente de la recta

b: intercepto con el eje y

Ejemplo:

Grafica la función: $f(x) = -2x + 4$

Resolución:

$f(x) = (-2)x + (4)$

↓ m ↓ b

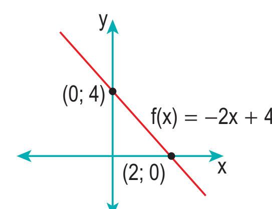
Se sabe que su gráfica será una recta, para ello solo se necesitan los interceptos con los ejes, evaluamos: f(0) y f(x) = 0

- $f(0) = -2(0) + 4 = 4$
- $0 = -2x + 4 \Rightarrow x = 2$

x	0	2
f(x)	4	0

interceptos (0; 4) y (2; 0)

Su gráfica es:



Dom(f)= $\mathbb{R}$

Ran(f) = $\mathbb{R}$

Ten en cuenta lo siguiente:

- La gráfica de toda función lineal es una línea recta.
- Para dibujar la gráfica de una función lineal basta con ubicar dos puntos en el plano y por ahí trazar una recta.



2. Función identidad

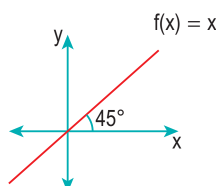
Es una función lineal, donde: $m = 1 \wedge b = 0$

$f(x) = x$ o $y = x$

La gráfica de esta función:

- Siempre pasa por el origen de coordenadas: (0; 0)
- Es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
- La pendiente es: $m = \tan 45° = 1$

Su gráfica es:



$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$

m = pendiente = $\tan 45° = 1$

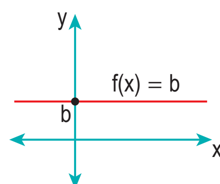
3. Función constante

Es una función lineal, donde: $m = 0$

$f(x) = b$ o $y = b$

- Al graficar esta función se obtiene una recta paralela al eje x.

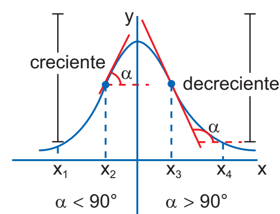
Su gráfica es:



$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\text{Ran}(f) = \{b\}$

Nota

Crecimiento de una función



Creciente:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Decreciente:
$x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) > f(x_4)$

4. Función cuadrática

Es la función determinada por la siguiente regla de correspondencia:

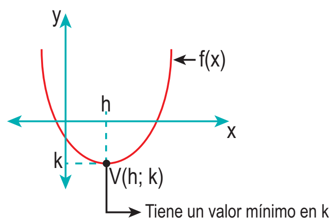
$f(x) = ax^2 + bx + c$ o $y = ax^2 + bx + c$

Completando cuadrados: $y - k = a(x - h)^2$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola de vértice (h; k).
Donde:

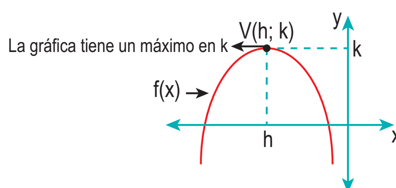
$$h = -\frac{b}{2a} \wedge k = f(h)$$

- Si: $a > 0$
  La parábola se abre hacia arriba.



$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\text{Ran}(f) = [k; +\infty\rangle$

- Si: $a < 0$
  La parábola se abre hacia abajo.



$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\text{Ran}(f) = \langle -\infty; k]$

Ejemplo:
Grafica la función $y = -2x^2 + 4x + 1$

Resolución:
Identificamos coeficientes:

$$y = \underset{a}{-2}x^2 + \underset{b}{4}x + \underset{c}{1}$$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$$

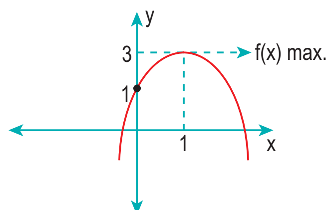
$$k = f(h) = f(1) = -2(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$k = 3$$

Intercepto con el eje y: $f(0) \Rightarrow y = -2(0)^2 + 4(0) + 1$
$y = 1$

Entonces:

- Punto: (0; 1)
- Vértice: (1; 3)
- $a < 0 \Rightarrow$ La parábola se abre hacia abajo.

Graficamos:



La gráfica tiene un máximo en 3.

Atención

Método para graficar una función cuadrática completando cuadrados.

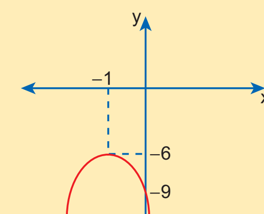
Sea: $y = -3x^2 - 6x - 9$
Completando cuadrados:

$$y = -3\Big[\underbrace{x^2 + 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2}_{(x+1)^2} - \left(\tfrac{2^2}{2}\right)\Big] - 9$$

$y = -3(x + 1)^2 + 3 - 9$
$y + 6 = -3(x + 1)^2$

Dándole forma:

$$y - \underset{k}{(-6)} = \underset{a}{-3}(x - \underset{h}{(-1)})2$$



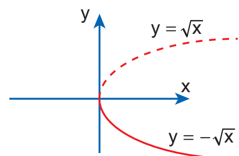
El punto de intersección con el eje **y** se ubica evaluando x = 0.



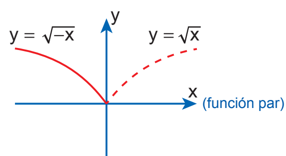
Nota

Simetrías o reflejos de las gráficas

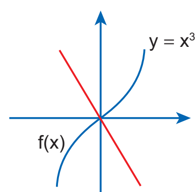
AL EJE x:
f(x) se cambia por –f(x)



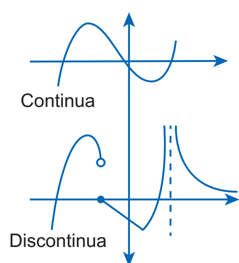
AL EJE y:
f(x) se cambia por f(–x)



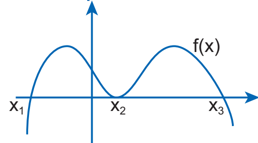
AL ORIGEN:
Sea
Si f(–x) = –f(x), la gráfica es simétrica al origen (función impar):



Continuidad
La gráfica es continua si no presenta saltos o interrupciones:



Función polinomial



f(x) es función polinomial de 4.° grado. cuyas raíces son x_1; x_2; x_3 y x_2 es raíz doble

$f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)$

Otro método: completando cuadrados

$y = -2x^2 + 4x + 1$

$y = -2(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1) + 1$

$y = -2(x - 1)^2 + 3$

$y - \underset{k}{3} = \underset{a}{-2}(x - \underset{h}{1})^2$

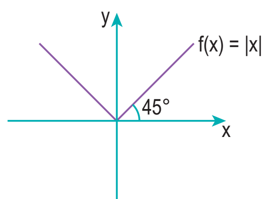
- Vértice
  (h; k) = (1; 3)
- Intercepto con el eje y:
  x = 0
  $\Rightarrow y - 3 = -2(0 - 1)^2$
  y = 1

Punto (0; 1)

Por ambos métodos se obtiene la misma gráfica.

5. Función valor absoluto

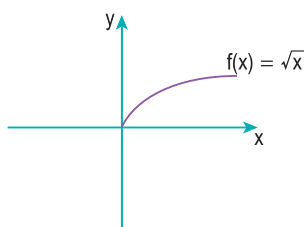
$y = f(x) = |x|$



Dom(f) = ℝ
Ran(f) = [0; +∞⟩

6. Función raíz cuadrada

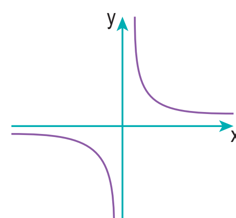
$y = f(x) = \sqrt{x}$



Dom(f) = [0; +∞⟩
Ran(f) = [0; +∞⟩

7. Función inverso multiplicativo

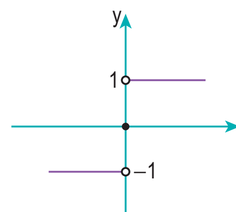
$y = f(x) = \dfrac{1}{x}$



Dom(f): ℝ – {0}
Ran (f): ℝ – {0}

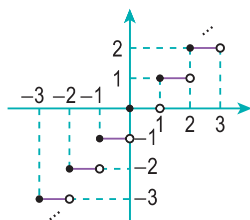
8. Función signo

$$y = f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$



Dom(f): ℝ
Ran (f): {–1; 0; 1}

9. Función máximo entero



$$f(x) = \begin{cases} 2; & x \in [2; 3\rangle \\ 1; & x \in [1; 2\rangle \\ 0; & x \in [0; 1\rangle \\ -1; & x \in [-1; 0\rangle \\ -2; & x \in [-2; -1\rangle \end{cases}$$

Domf(x) = ℝ
Ranf(x) = ℤ

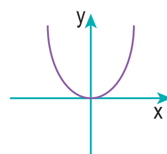
Función par

Es aquella función f(x) que se caracteriza por ser simétrica al eje y.

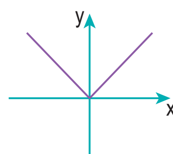
Se cumple: $f(-x) = f(x)$ $\forall$ x; –x ∈ Domf(x)

Ejemplos:

- $f(y) = x^2$
  $\Rightarrow f(-x) = (-x^2)$
  $\therefore f(-x) = f(x)$



- $f(x) = |x|$
  $\Rightarrow f(-x) = |-x|$
  $\therefore f(-x) = |x|$



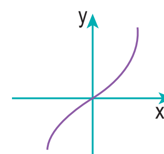
Función impar

Es aquella función f(x) que es simétrica al origen. Se cumple:

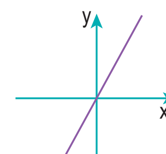
$f(-x) = -f(x)$ $\forall$ x; –x ∈ Domf(x)

Ejemplos:

- $f(x) = x^3$
  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$
  $\therefore f(-x) = -f(x)$



- $f(x) = 3x$
  $f(-x) = 3(-x) = -3x$
  $\therefore f(-x) = -f(x)$





OPERACIONES CON FUNCIONES

Sean F y G dos funciones tal que $Dom(F) \cap Dom(G) \neq \varnothing$, se definen las siguientes operaciones:

Suma de funciones: (F + G)

$$(F + G)x = F(x) + G(x)\ ;\ \ Dom(F + G) = Dom(F) \cap Dom(G)$$

Diferencia de funciones: (F – G)

$$(F - G)x = F(x) - G(x);\ Dom(F + G) = Dom(F) \cap Dom(G)$$

Producto de funciones: (F . G)

$$(F\ .\ G)x = F(x)\ .\ G(x);\ Dom(F\ .\ G) = Dom(F) \cap Dom(G)$$

División de funciones (F/G)

$$(F/G)x = F(x)/G(x);\ Dom(F/G) = Dom(F) \cap DomG - \{x\ /\ G(x) = 0\}$$

Ejemplo:

Dadas las funciones:

$F = \{(-3; 1); (-2; 4); (0; 6); (7; 1); (-1; 2)\}$

$G(x) = |x - 1| - 2;\ x \in \langle -5; 1\rangle$

Determina: F + G; F – G; F . G; F/G

Resolución:

Para F + G; F – G y F . G, el dominio es:

$Dom(F) \cap Dom(G)$

$\{-3; -2; 0; 7; -1\} \cap \langle -5; 1\rangle$

$Dom(F + G) = \{-3; -2; 0; -1\}$

$\Rightarrow\ F + G = \{(-3; F(-3) + G(-3)); (-2; F(-2) + G(-2));$
$(0; (F(0) + G(0)); (-1; F(-1) + G(-1))\}$

$F + G = \{(-3; 1+2); (-2; 4+1); (0; 6+(-1)); (-1; 2+0)\}$

$F + G = \{(-3; 3); (-2; 5); (0; 5); (-1; 2)\}$

Con el mismo procedimiento:

$F - G = \{(-3; -1); (-2; 3); (0; 7); (-1; 2)\}$

$F\ .\ G = \{(-3; 2); (-2; 4); (0; -6); (-1; 0)\}$

$F/G(x) = \dfrac{F(x)}{g(x)}$ $\quad DomF/G = \underbrace{DomF \cap DomG} - \{x\ /\ G(x) = 0\}$

$DomF/G = \underbrace{\{-3; -2; 0; -1\} - \{-1; 3\}}$

$DomF/G = \{-3; -2; 0\}$

$$\Rightarrow\ F/G(x) = \left\{\left(-3;\frac{F(-3)}{G(-3)}\right);\left(-2;\frac{F(-2)}{G(-2)}\right);\left(0;\frac{F(0)}{G(0)}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow\ F/G(x) = \left\{\left(-3;\frac{1}{2}\right);(-2; 4);(0; -6)\right\}$$

Ten en cuenta

Igualdad de funciones

F(x) y G(x) son iguales si:

I. DomF(x) = DomG(x)

II. F(x)=G(x);
$\forall\ x \in DomF = DomG$

Es decir, para que dos funciones sean iguales sus dominios y regla de correspondencia deben ser iguales.

$\Rightarrow\ F(x) = \dfrac{x}{x^2}$ y $G(x) = \dfrac{1}{x}$

son iguales



Composición de funciones

Dadas las funciones F y G, se define la función compuesta de F con G, así:

$F \circ G(x) = F(G(x))$ (regla de correspondencia)

$DomF \circ G = \{x\ /\ x \in Dom(G) \wedge G(x) \in Dom(F)$

Ejemplos:

1. Si $f(x) = x^2 - 7$ y $g(x) = x - 1$;
determina la regla de correspondencia del fog.

   Resolución:
   Evaluamos g(x) en f(x):
   $f(g(x)) = (x - 1)^2 - 7 = x^2 - 2x - 6$

2. Determina el dominio de F∘G, si:
   $F = \{(2; 4); (3; 6); (4; 7); (8; 9)\}$
   $G = \{(6, 8); (3; 3); (5; 6); (2; 4)\}$

   Resolución:
   $DomF \circ G: \underbrace{x\ /\ x \in Dom(G)} \wedge \underbrace{G(x) \in Dom(F)}$

   $\{6; 3; 5; 2\}$

   $G(6) = 8 \in DF$
   $G(3) = 3 \in DF$
   $G(5) = 6 \notin DF$
   $G(2) = 4 \in DF$

   $\therefore\ DomF \circ G = \{6; 3; 2\}$

3. Sean las funciones:
   $F(x) = x^2 - 2x + 1; -2 < x \leq 4 \wedge G(x) = \sqrt{x} + 1; x \geq 0$
   Halla: F∘G

   Resolución:
   Dom F∘G:
   $\underbrace{x\ /\ x \in Dom(G)} \quad \wedge \quad \underbrace{G(x) \in Dom(F)}$

   $x \geq 0 \quad \wedge \quad -2 < \sqrt{x} + 1 \leq 4$
   $x \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x} + 1 \leq 4$
   $x \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x} \leq 3$
   $x \geq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 9$

   $\Rightarrow\ 0 \leq x \leq 9\ \Rightarrow\ x \in [0; 9]$

   $\Rightarrow$ Dom F∘G = [0; 9]
   Hallamos la regla de correspondencia:
   $F \circ G(x) = F(G(x)) = F(\sqrt{x} + 1)$
   $= (\sqrt{x} + 1)^2 - 2(\sqrt{x} + 1) - 1$
   $F \circ G(x) = x + 2\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x} - 2 - 1$
   $\therefore\ F \circ G(x) = x - 2; x \in [0; 9]$

Nota

Propiedades:

$f \circ g \neq g \circ f$

$(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

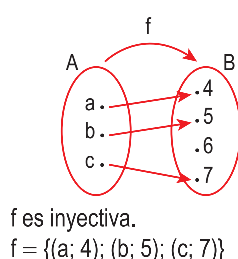
$(fg) \circ h = (f \circ h)(g \circ h)$

Función inyectiva o univalente (uno a uno)

Sea una función f: A → B; f es inyectiva si a cada imagen le corresponde una única preimagen.

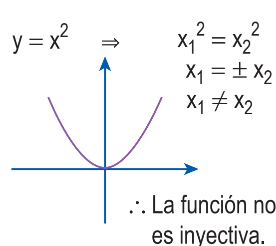
Si $x_1; x_2 \in Dom(f) \Rightarrow$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Ejemplos:



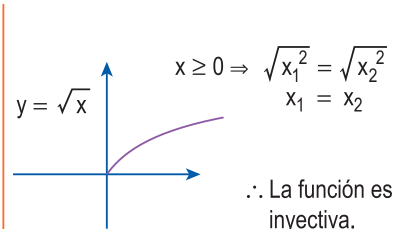
f es inyectiva.
f = {(a; 4); (b; 5); (c; 7)}

$y = x^2 \Rightarrow$ $x_1^2 = x_2^2$, $x_1 = \pm x_2$, $x_1 \neq x_2$



∴ La función no es inyectiva.

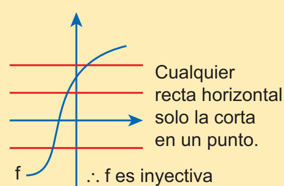
$y = \sqrt{x}$ $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$, $x_1 = x_2$

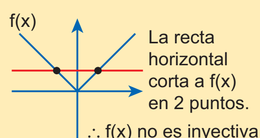


∴ La función es inyectiva.

Importante

Gráficamente a una función inyectiva se la reconoce, trazando una recta horizontal a la gráfica, si corta a la gráfica en un solo punto, será inyectiva.







Función suryectiva o sobreyectiva

Una función f: A → B, es suryectiva si su rango coincide con el conjunto de llegada B, es decir, $Ran(f) = B$

Función biyectiva

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y suryectiva a la vez.

Función inversa

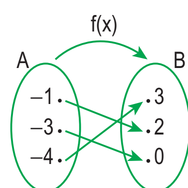
Llamada también función recíproca.
Notación: f^{-1} o f*
Si f: A → B es una función inyectiva;
entonces se define: f^{-1}: B → A como una función inversa.

$f^{-1}(f(x)) = x \; ; \; \forall x \in Domf$
$f(f^{-1}(x)) = x \; ; \; \forall x \in Domf^{-1}$

Donde: Si $A \in Dom(f) \Rightarrow A \in Ran(f^{-1})$, es decir $Dom(f) = Ran(f^{-1})$
Si $B \in Ran(f) \Rightarrow B \in Dom(f^{-1})$, es decir $Ran(f) = Dom(f^{-1})$

Ejemplos:
Halla $f(x)^{-1}$ si existe, en cada caso:

1. Sea: f(x): A → B



Resolución:
- Como a cada elemento del dominio le corresponde un único valor, entonces es inyectiva.
  Por lo tanto:
  existe f^{-1}: B → A = {(3; –4); (2; –1); (0; –3)}

2. Sea: f(x) = 2x – 3

   Resolución:
   $f(f^{-1}(x)) = x$

   Evaluamos: $2(f^{-1}(x)) - 3 = x$

   $\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

3. Sea: $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$

   Resolución:
   Comprobamos si es inyectiva.
   Veamos:
   $f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2$

   $\dfrac{2x_1+5}{x_1-3} = \dfrac{2x_2+5}{x_2-3}$

   $2x_1x_2 + 5x_2 - 6x_1 - 15 = 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 - 15$

   $x_1 = x_2 \Rightarrow$ es inyectiva

   - $f(x) = y = \dfrac{2x+5}{x-3}$ (despejamos x para hallar la regla de correspondencia)

   $y = \dfrac{2x+5}{x-3}$

   $yx - 3y = 2x + 5$

   $x = \dfrac{3y+5}{y-2}$ (cambiamos y por x)

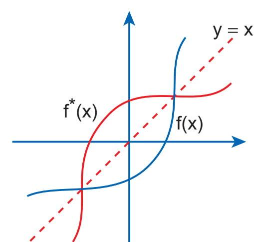
   $\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$

Propiedades:

I. $Dom\ F^{-1} = Ran\ F$
II. $Ran\ F^{-1} = Dom\ F$
III. $F^{-1} \circ F = I$ (función identidad)
IV. $F \circ F^{-1} = I$
V. $(F^{-1})^{-1} = F$
VI. $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

Nota

Una función inversa $f^{-1}(x)$ también es inyectiva y su gráfica se obtiene reflejando f(x) respecto a la función identidad y = x.



x de f(x) viene a ser **y** de $f^{-1}(x)$
y de f(x) viene a ser **x** de $f^{-1}(x)$

Nota

Función monótona, es cuando la función es creciente o decreciente en su dominio.

Función exponencial

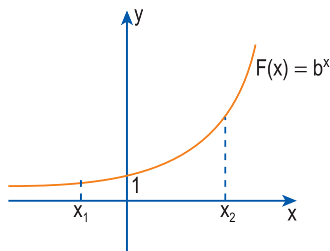
Sea **b** un número real positivo y diferente de 1, la función exponencial queda definida por:

$y = F(x) = b^x$ DomF(x): $\mathbb{R}$
RanF(x) : $\langle 0; +\infty \rangle$

$\forall b > 0 \wedge b \neq 1$

Presenta las siguientes gráficas:

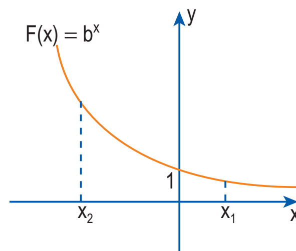
Si $b > 1$; F(x) es creciente.



Teorema:

Si : $b^{x_1} < b^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2$

Si $0 < b < 1$; F(x) es decreciente.



Teorema:

Si : $b^{x_1} < b^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2$

Observación

La función exponencial es inyectiva, entonces se cumple:
$b^x = b^y \Rightarrow x = y$



Ejemplos:

1. Determina x en cada caso:

a) Si: $3^{x-1} = 27$

Resolución:

$3^{x-1} = 3^3 \Rightarrow x = 4$

b) Si: $2^{3x-2} = 4 \times 8 \times 2^2$

Resolución:

$2^{3x-2} = 2^2 \times 2^3 \times 2^2 = 2^7$

$\Rightarrow 3x - 2 = 7 \Rightarrow x = 3$

2. Determina x^y.

Si: $2^{x+y} = 64$ ... (1)
$2^{2y+x} = 512$ ... (2)

Resolución:

De (1): $\underbrace{2^{x+y} = 64 = 2^6}_{x+y=6}$

De (2): $\underbrace{2^{2y+x} = 512 = 2^9}_{2y+x=9}$

$\Rightarrow x + y = 6$
$2y + x = 9$ (–)
$y = 3 \wedge x = 3 \therefore x^y = 3^3$

3. Determina el conjunto solución en cada caso:

a) $16^x > 4$

Resolución:

$(4^2)^x > 4$

$4^{2x} > 4^1$

$\Rightarrow 2x > 1$

$\therefore x > \frac{1}{2}$

b) $(\frac{1}{4})^x > 0,0625$

Resolución:

$(\frac{1}{4})^x > (\frac{1}{4})^2$

$\Rightarrow x < 2$

c) $\sqrt[3]{3^{x+3}} < \sqrt{81}$

Resolución:

$3^{\frac{x+3}{3}} < 3^2$

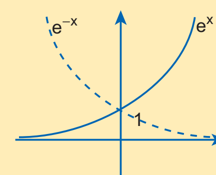
$\Rightarrow \frac{x+3}{3} < 2$

$\therefore x < 3$

Observación

La constante **e** (número de Euler) también es conocido como número natural o neperiano:
$e \cong 2,71828$

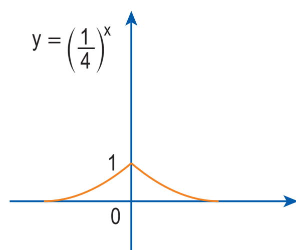
$f(x) = e^x$ es una función exponencial.



4. Grafica: $y = (\frac{1}{4})^{|x|}$

Resolución:
Observamos que es una función par (simétrica al eje y).

$\Rightarrow$ Graficamos para $x \geq 0$ y reflejamos:



5. Grafica: $y = 2^x$

Resolución:

Como: $b = 2 > 1$

$\Rightarrow y = 2^x$ es creciente

Graficamos:



Función logarítmica

Se define:

$y = F(x) = \log_b x$ equivale a $\underbrace{b^y = x}$ (propiedad de logaritmos)

$b > 0 \wedge b \neq 1;\ x \in \langle 0; +\infty \rangle$

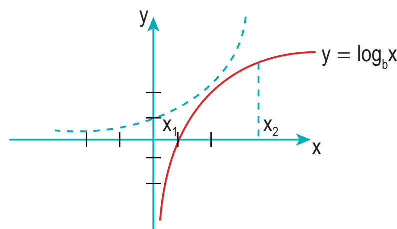
$F^{-1}(x) = b^x$

(la inversa de la función exponencial es la función logarítmica)

Gráficas:

Sea $F(x) = \log_b x$

Si $b > 1$



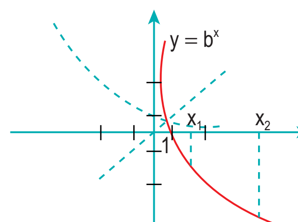
$\text{Dom}F(x) = \langle 0; +\infty \rangle$

$\text{Ran}F(x) = \mathbb{R}$

Teorema:

Si: $\log_b x_1 < \log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$; $\forall\ b > 1$

Si $0 < b < 1$



$\text{Dom}F(x) = \langle 0; +\infty \rangle$

$\text{Ran}F(x) = \mathbb{R}$

Teorema:

Si: $\log_b x_1 > \log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$; $\forall\ 0 < b < 1$

Ejemplos:

1. Encuentra el dominio de: $f(x) = \log_5 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

   Resolución:
   De la definición:

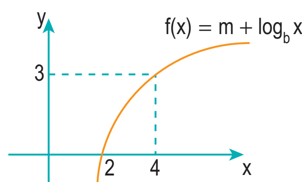
   $1 - \frac{x^2}{4} > 0$

   $x^2 < 4$

   $\Rightarrow -2 < x < 2$

   $\therefore \text{Dom}f(x) = \langle -2; 2 \rangle$

2. La figura muestra la gráfica de una función f.



   Calcula: $\log_b 2$

   Resolución:

   De la gráfica f tenemos:

   $f(2) = 0 \Rightarrow m + \log_b 2 = 0 \Rightarrow \log_b 2 = -m$ ... (I)

   $f(3) = 3 \Rightarrow m + \log_b 4 = 3 \Rightarrow m + \log_b 2^2 = 3$ ... (II)

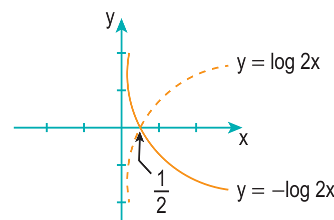
   Reemplazamos (I) en (II):

   $-\log_b 2 + 2\log_b 2 = 3$

   $\Rightarrow \log_b 2 = 3$

3. Grafica: $y = \log 2x$

   Resolución:



4. Grafica: $y = \log_2(x^2 - 2x + 1)$

   Resolución:

   Primero por definición: $\underbrace{x^2 - 2x + 1} > 0$

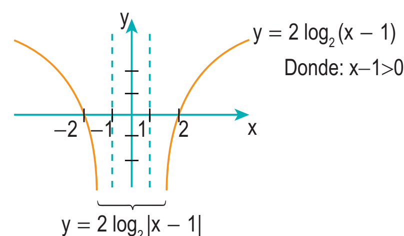
   $(x - 1)^2 > 0$

   $\Rightarrow$ "y" se puede escribir como:

   $y = \log_2 |x - 1|^2$

   $y = 2\log_2 |x - 1|$

   Graficamos: $y = 2\log_2(x - 1)$ y reflejamos en el eje y:



Observación

$x = e^y \iff y = \log_e x = \ln x$

$f(x) = \log_{10} x = \log x$



Recuerda

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a A^n = n\log_a A$

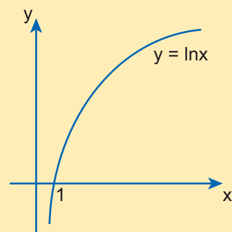
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$

$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

$f(x) = \log_e x = \ln x$

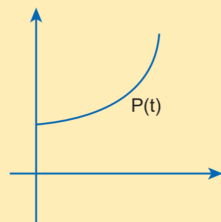
logaritmo neperiano de x.



Aplicaciones de funciones exponenciales

Modelo exponencial del crecimiento poblacional

$P(t) = P_0 e^{kt}$



Pt: población en el instante t

P_0: población inicial

k: tasa relativa de crecimiento

t: tiempo en años

Interés compuesto

$C = f(c) = C_0(1 + r)^t$

c: capital final

c_0: capital inicial

r: tasa de interés anual

t: tiempo en años



Problemas resueltos

1 Calcula el valor de $\sqrt{2a - b}$, si el conjunto de pares ordenados es una función:
F = {(2; 6), (1; a – b), (1; 4), (2; a + b), (3; 5)}

Resolución:

Dada la función:
F = {(2; 6), (1; a – b), (1; 4), (2; a + b), (3; 5)}
Se cumple:
$a - b = 4$
$a + b = 6$
Resolviendo:
$a = 5 \wedge b = 1$
Nos piden:
$\sqrt{2a - b} = \sqrt{2.5 - 1} = 3$

2 Dada la función F, donde:
$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{x+2}{x-5}\}$
determina su dominio y rango.

Resolución:

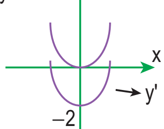
Dominio:
$y = \frac{x+2}{x-5}$
$\Rightarrow x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$
$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{5\}$
$\therefore \text{Dom}(F) = \mathbb{R} - \{5\}$

Rango:
$y = \frac{x+2}{x-5}$
$xy - 5y = x + 2$
$(y - 1)x = 5y + 2$
$x = \frac{5y+2}{y-1}$
$\Rightarrow y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$
$\Rightarrow y \in \mathbb{R} - \{1\}$
$\therefore \text{Ran}(F) = \mathbb{R} - \{1\}$

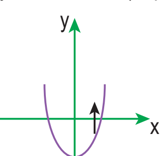
3 Realiza la gráfica de $F(x) = |x^2 - 2| + 3$ e indica:
DomF(x) y RanF(x)

Resolución:

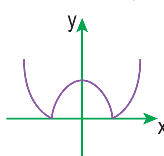
Partimos de la gráfica conocida:



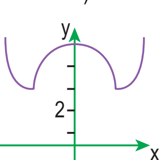
$y'' = |x^2 - 2|$ (la parte negativa de $x^2 - 2$ se refleja en el eje x)



$\Rightarrow y'' = |x^2 - 2|$



Finalmente $F(x) = |x^2 - 2| + 3$; (y'' se desplaza verticalmente 3 unidades):



DomF(x): $\mathbb{R}$
RanF(x) = $[3; +\infty\rangle$

4 Halla el dominio de la función real:
$F(x) = \sqrt{\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x-3}{x+1} - 49}$

Resolución:

$F(x) = \sqrt{\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x-3}{x+1} - 49}$

$\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x-3}{x+1} - 49 \geq 0$

$\frac{4 + (x-3)(x+1)}{(x+1)^2} \geq 49$

Reduciendo:

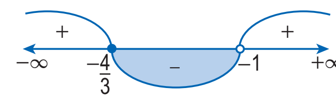
$\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \geq 49$

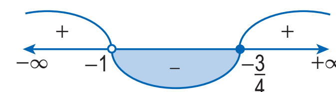
Sacamos la raíz de ambos miembros:

$\frac{x-1}{x+1} \geq 7 \vee \frac{x-1}{x+1} \leq -7$

$7 - \frac{x-1}{x+1} \leq 0 \vee 7 + \frac{x-1}{x+1} \leq 0$

$\frac{3x+4}{x+1} \leq 0 \vee \frac{4x+3}{x+1} \leq 0 \wedge x + 1 \neq 0$





Luego:

$x \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right\rangle \cup \left\langle -1; -\frac{3}{4}\right]$

$\therefore x \in \left[-\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}\right] - \{-1\}$

5 Determina f + g y f/g si:
f = {(–1; 3), (0; 2), (4; –3), (6; 0)}
g = {(–2; 5), (–1; 7), (4; 0), (0; 7), (9; 1)}

Resolución:

f + g: calculamos $\text{Dom}(f + g) = \underbrace{\text{Dom}(f)}_{\{-1;\,0;\,4;\,6\}} \cap \underbrace{\text{Dom}(g)}_{\{-2;\,-1;\,4;\,0;\,9\}}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f + g) = \{-1; 0; 4\}$

$\Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \{(-1; f(-1) + g(-1)), (0; f(0) + g(0)), (4; f(4) + g(4)\}$

$= \{(-1; 3 + 7), (0; 2 + 7), (4; -3 + 0)\}$

$(f + g)x = \{(-1; 10), (0; 9), (4; -3)\}$

f/g: $\text{Domf/g} = \underbrace{\text{Domf} \cap \text{Domg}}_{\{-1;\,0;\,4\}} - \{x \in Dg(x)/g(x) = 0\}$ $- \{4\}$ (ya que g(4) = 0)

$\Rightarrow \text{Domf/g} = \{-1; 0\}$

$(f/g)x = \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\left(-1; \frac{f(-1)}{g(-1)}\right), \left(0; \frac{f(0)}{g(0)}\right)\right\}$

f/g = {(–1; 3/7); (0; 2/7)}

6 Si $f(x) = x^2$ y $f \circ g(x) = x^2 - 14x + 49$; determina $g(x)$.

Resolución:

Del dato:
$f(g(x)) = x^2 - 14x + 49$
$g(x)^2 = (x-7)^2$
$|g(x)| = |x-7|$
$\therefore\ g(x) = \pm(x-7)$

7 Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & ; \ x \geq 1 \\ |x-1| - x & ; \ x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & ; \ x > -2 \\ x^2 + x & ; \ x \leq -2 \end{cases}$$

Halla $M = f(1) + f(-2) + f(g(-1)) + g(f(1))$

Resolución:

$f(1) = (1)^2 - 3(1) = -2$
$f(-2) = |-2-1| - (-2) = 5$
$f(g(-1)) = f(2(-1) - 4) = f(-6) = |-6-1| - (-6) = 13$
$g(f(1)) = g(1^2 - 3(1)) = g(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$
$\therefore\ M = -2 + 5 + 13 + 2 = 18$

8 Determina $f^*(x)$ si existe, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & ; \ x \geq -2 \\ x^2 + 4x - 2 & ; \ x < -2 \end{cases}$$

Resolución:

Para ver si existe $f^*(x)$ determinamos si $f(x)$ es inyectiva.

- Para $x \geq -2$; $f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$

  $x + 2 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x_1+2}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{x_2+2}}_{\geq 0}$

  Elevamos al cuadrado:
  $x_1 + 2 = x_2 + 2$
  $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x)\ \forall\ x \geq -2$ es inyectiva

  Determinamos el rango de $f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f(x) \geq 0$
  $\Rightarrow \text{Dom}f^*(x) = [0; +\infty\rangle$

  Regla de correspondencia: $f^*(x) = y = \sqrt{x+2}$
  $y^2 = x + 2$
  $x = y^2 - 2$
  $f^*(x) = x^2 - 2;\ \forall x \geq 0$

- Para $x < -2$
  $f(x) = x^2 + 4x - 2$
  $f(x) = (x+2)^2 - 6$

  Veamos si es inyectiva:
  $\Rightarrow \underbrace{(x_1+2)}_{<0}{}^2 - 6 = \underbrace{(x_2+2)}_{<0}{}^2 - 6$
  $-x_1 - 2 = -x_2 - 2$
  $x_1 = x_2 \Rightarrow$ es inyectiva, posee inversa.

  Determinamos Ranf(x): $x + 2 < 0$
  $(x+2)^2 > 0$
  $(x+2)^2 - 6 > -6$

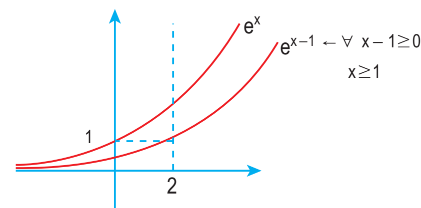
  Regla de correspondencia:
  $f(x) = y = (x+2)^2 - 6$
  $y + 6 = (x+2)^2 \qquad (x + 2 < 0)$
  $\sqrt{y+6} = -x - 2$
  $x = -2 - \sqrt{y+6} \Rightarrow f^*(x) = -2 - \sqrt{x+6}$

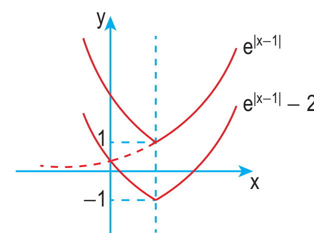
$$\therefore\ f^*(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \ x \geq 0 \\ -2 - \sqrt{x+6} & ; \ x > -6 \end{cases}$$

9 Grafica: $f(x) = |e^{|x-1|} - 2|$

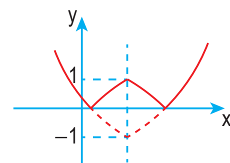
Resolución:

- Partimos de la gráfica exponencial conocida:





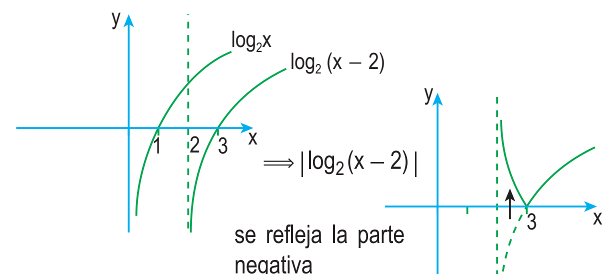
Finalmente por estar en valor absoluto la parte negativa se refleja en el eje x.
$F(x) = |e^{|x-1|} - 2|$



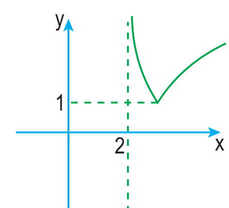
10 Grafica: $y = |\log_2(x-2)| + 1$ e indica su dominio y rango.

Resolución:

- La gráfica conocida es $\log_2 x$:



Finalmente $|\log_2(x-2)| + 1$
La gráfica sube 1 unidad

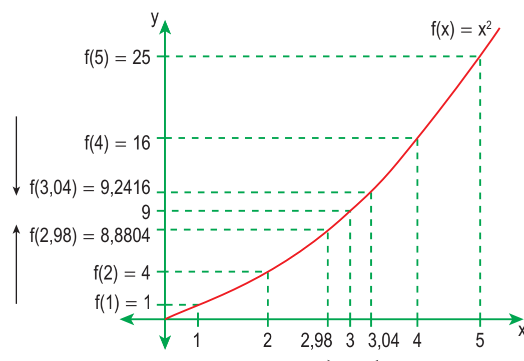


De la gráfica: $\text{Dom} = \langle 2; +\infty\rangle$
$\text{Ran} = [1; +\infty\rangle$

LÍMITES

NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE

En matemáticas el límite es una tendencia que tiene una función o sucesión de aproximarse a un valor.
En el gráfico podemos ver que cuando x se va aproximando a 3 (tanto por la izquierda como por la derecha), las respectivas imágenes se van aproximando a 9 (tanto por abajo como por arriba).



Cuando x se aproxima a 3; f(x) se aproxima a 9.

Simbolizando: cuando $x \to 3$, entonces $f(x) \to 9$

Lo que a su vez se sintetiza con la siguiente notación:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

Luego, lím f(x) nos indica el valor límite de f(x).

En general:

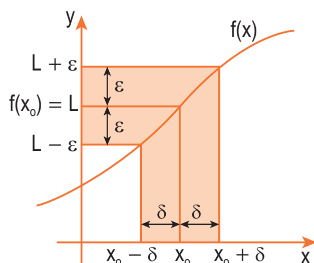
El límite de f(x) cuando x se aproxima a x_0 es L

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

Dada una función f: $Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de Df (Df = Dom(f)); diremos que el límite de la función f(x) cuando x se aproxima a x_0 es el número real L, si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 / x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



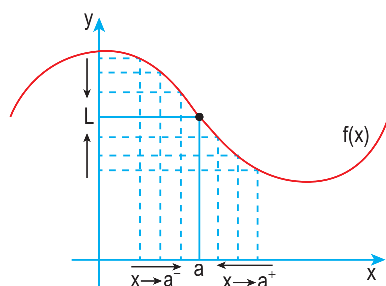
Es decir, para todo épsilon mayor que cero (tan pequeño como se quiera) debe existir un delta mayor que cero, de tal manera que los puntos (x; f(x)), $\forall x \in \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$; deben estar en el interior de la región rectangular comprendida por las rectas $x = x_0 - \delta$; $x = x_0 + \delta$; $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$.

TEOREMA DE LA UNICIDAD DEL LÍMITE

Si existe el límite de una función, este es único.

$$\text{Si: } \lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

DEFINICIÓN DE LÍMITES LATERALES



En la gráfica se observa que cuando x tiende a valores próximos de “a”, tanto por la derecha como por la izquierda, f(x) tiende a L por arriba y por debajo respectivamente.

Donde:

a; $L \in \mathbb{R}$, y L es el valor del límite en el punto a.

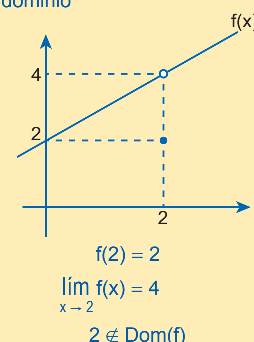
Recuerda

Punto de acumulación

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. A x_0 se le llama punto de acumulación del conjunto A si y solo si, todo intervalo abierto de centro x_0 contiene por lo menos un $x \neq x_0$ del conjunto A.

Observación

x_0 (punto de acumulación) puede estar o no en el dominio



$f(2) = 2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

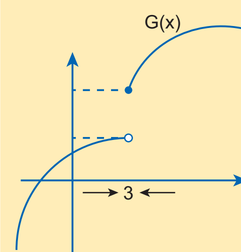
$2 \notin Dom(f)$





Atención

Veamos el siguiente gráfico:



En el punto x = 3
G(x) posee límites laterales diferentes

$\therefore$ no existe $\lim_{x \to 3} G(X)$

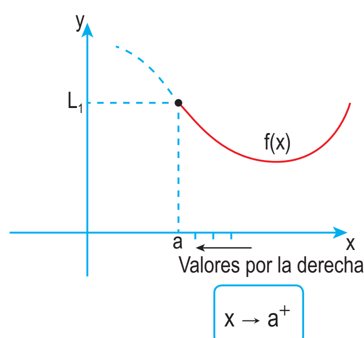
Atención

Si: $\lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow x > a$

Si: $\lim_{x \to a^-} f(x) \Rightarrow x < a$



Límite lateral por la derecha

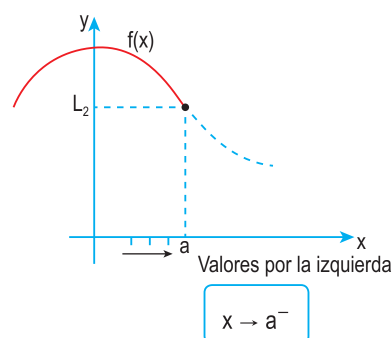


$x \to a^+$

x toma valores cercanos y mayores al valor de a.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$

Límite lateral por la izquierda



$x \to a^-$

x toma valores muy próximos y menores al valor de a.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL LÍMITE

El límite de f(x) existe si y solo si existen los límites laterales y estos son iguales.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Ejemplo:

Determina si existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} 6 - x\,;\, x > 2 \\ x^2\;;\; x \leq 2 \end{cases}$

Resolución:

Aplicamos el criterio de los límites laterales. Tomando como punto de acumulación al 2.

Límite lateral por la derecha

$\lim_{x \to 2^+} (x) \Rightarrow \lim_{x \to 2^+} (6 - x) = 4$

Límite lateral por la izquierda

$\lim_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$

Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to 2} f(x)$ (El límite existe cuando x tiende a 2)

Observación

Si una función posee límites laterales diferentes:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

No existe límite en el punto x_0.



Teoremas de límites

Sea la función f(x) y x_0 un punto de acumulación del dominio de f, tal que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Entonces:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n = (L)^n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+$

2. $\lim_{x \to x_0} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to x_0} f(x)} = b^L\,;\, b > 0 \wedge b \neq 1$

3. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L}\;;\, n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$

   donce $L \geq 0$, si n es par y $L \in \mathbb{R}$ si n es impar.

TEOREMA DEL SANDWICH

Sean 3 funciones f(x), g(x) y h(x), tales que:

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Si: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

Nota

Álgebra de límites

Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) L_2$.

$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

$\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$

$\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \lim_{x \to x_0} (f) \times \lim_{x \to x_0} g(x)$

$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}\,;\, L_2 \neq 0$

$\lim_{x \to x_0} [f(x)^{g(x)}] = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

LÍMITES INDETERMINADOS

Un límite indeterminado $\lim_{x \to a} f(x)$ se da cuando no se puede calcular el límite simplemente evaluando f(a).

Se presentan cuando el valor del límite es: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 1^{\infty}$

Atención

Si $\lim_{x \to a} f(x) > 0$, entonces:

$\lim_{x \to a} \log f(x) = \log \lim_{x \to a} f(x)$

$\lim_{x \to a} \ln f(x) = \ln \lim_{x \to a} f(x)$



Límites de la forma $\frac{0}{0}$

Para calcular el límite de esta forma se aplican los métodos de factorización, cocientes notables y productos notables, con el fin de eliminar el factor que genera la indeterminación. Esto en el caso de funciones racionales. Y en el caso de funciones irracionales se racionaliza.

Ejemplos:

1. Halla:

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$$

Resolución:

- Evaluando en el límite: x = 4

  Obtenemos: $\frac{0}{0}$

- Entonces factorizamos:

$$\left.\begin{array}{lr} 3x^2 - 17x + 20 & \\ 3x & -5 \\ 1x & -4 \end{array}\right\} (3x-5)(x-4)$$

$$\left.\begin{array}{lr} 4x^2 - 25x + 36 & \\ 4x & -9 \\ x & -4 \end{array}\right\} (4x-9)(x-4)$$

- Reemplazamos:

$$\lim_{x \to 4} \frac{(3x-5)\cancel{(x-4)}}{(4x-9)\cancel{(x-4)}} = \lim_{x \to 4} \frac{3x-5}{4x-9}$$

$$= \frac{7}{7} = 1$$

2. Calcula:

$$\lim_{x \to 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$$

Resolución:

- Evaluamos:

$$\frac{\sqrt{25} - 5}{25 - 25} = \frac{0}{0}$$

- Como se observa una función irracional multiplicamos por la conjugada:

$$\lim_{x \to 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25} \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 5}$$

$$\lim_{x \to 25} \frac{\cancel{(x-25)}}{\cancel{(x-25)}\sqrt{x} + 5}$$

- Ahora evaluamos nuevamente:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 25} \frac{1}{\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{10}$$

Recuerda

En los límites indeterminados o límites infinitos, se busca eliminar factores que generan la indeterminación lo que se conoce como "levantar la indeterminación".



Límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Se emplean los siguientes teoremas:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0; \quad n \in \mathbb{Z}^+$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0; \quad n \in \mathbb{Z}^+$

c) Sea el límite $\lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = L$

$$\Rightarrow L = \begin{cases} -\infty; \text{ si } n > m \text{ (grado del numerador > grado del denominador)} \\ \frac{a_0}{b_0}; \text{ si } n = m \text{ (grados iguales)} \\ 0 \quad ; \text{ si } n < m \text{ (grado del numerador < grado del denominador)} \end{cases}$$

d) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

e) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty \text{ si n es impar.} \\ -\infty \text{ si n es par.} \end{cases}$

Límites de la forma $\infty - \infty$

Se emplean los métodos usados en los límites de la forma: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo:

Calcula: $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 6} - x)$

Resolución:

Evaluando: $\infty - \infty$

Como es una función irracional multiplicamos por la conjugada:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7x+6}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2-7x+6}+x)}{(\sqrt{x^2-7x+6}+x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-7x+6-x^2)}{\sqrt{x^2-7x+6}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6-7x)/x}{(\sqrt{x^2-7x+6}+x)/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}=\frac{-7}{2}$$

Límites de la forma 1^{∞}

Se usan las definiciones del número de Euler (e):

a) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

Sea $z=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{z}$ cuando $z\to\infty \Rightarrow x\to 0$

$\Rightarrow \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e$

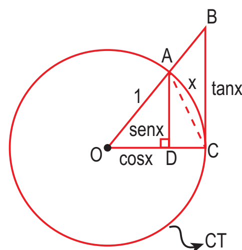
b) Sean dos funciones f(x) y g(x), tal que $\lim_{x\to x_0}(f(x)^{g(x)})=L$; si al evaluar x en x_0 $f(x_0)=1$ y $g(x_0)=\infty$, entonces: $L=e^{\lim_{x\to x_0}[(f(x)-1)g(x)]}$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{senx}}{x}=1$

$\Rightarrow$ cuando $x\to 0$
$\text{senx}\to x$

Demostración:
Dada la CT:



Observamos:

Área$_{\triangle ADO}$ < Área$_{\triangleleft AOC}$ < Área$_{\triangle BCO}$

$$\frac{\cos x \,\text{senx}}{2}<\frac{1}{2}\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

Dividiendo entre senx:

$$\frac{\cos x}{2}<\frac{x}{2\text{senx}}<\frac{1}{2\cos x}$$

Multiplicando por 2:

$$\cos x<\frac{\text{senx}}{x}<\frac{1}{\cos x}$$

Por el teorema del Sandwich:

Tomando los límites a los extremos.

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \wedge \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\text{senx}}{x}=1$$

2. $\lim_{x\to 0}\text{senx}=0$

3. $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

5. $\lim_{x\to 0}\sec x=1$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\csc x\cdot x}{x}=1$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(px)}{\text{sen}(qx)}=\frac{p}{q}$

Atención

El número e (Euler) es la base de los logaritmos neperianos y está definida:

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...=e$

Corolario

$e^n=\frac{1}{0!}+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\frac{n^3}{3!}+...$



Nota

Para límites trigonométricos, si $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$, con $x_0\neq 0$:

Sea:
$x-x_0=h \Rightarrow x=h+x_0$

$x\to x_0 \Rightarrow \underbrace{x-x_0}_{h}\to 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=L$

Se hace el cambio para que la variable tienda al valor de cero ($x\to 0$) que es como están definidos los límites trigonométricos.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\lim_{x-\frac{\pi}{2}\to 0}\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}+\pi\right)$

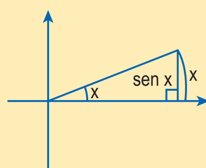
$=0$



Atención

Cuando: $x\cong 0$
$\Rightarrow \text{senx}\cong x$

El arco x se aproxima al valor senx.

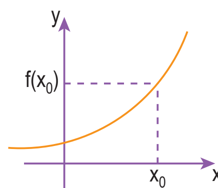


FUNCIÓN CONTINUA

Una función f(x) es continua en x_0 si y solo si:

1. $f(x_0)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe
3. $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Gráficamente:



Ejemplo:
Determina si la función: $f(x) = 4x + 1$ es continua en $x = 2$.

Resolución:
Se tiene $f(2) = 4(2) + 1 = 9$, además: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 4x + 1 = 4(2) + 1 = 9 = f(2)$

Luego, $f(x) = 4x + 1$, es continua en $x = 2$.

LA DERIVADA

Si f es una función, entonces la derivada de f, denotada por f', en un punto x, se calcula así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Teoremas relativos al cálculo de la derivada

1. Si $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, entonces: $f'(x) = c$
2. Si $f(x) = x^n$, entonces: $f'(x) = nx^{n-1}$; $n \in \mathbb{Z}^+$
3. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
4. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$
6. $[f \circ g(x)]' = g'(x)f'(g(x))$

Atención

Para la forma $0.\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, g(x)$

Donde: $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$

Se hacen operaciones para que tengan las formas conocidas de indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y se aplique lo convencional o la regla de L'Hospital.



LA REGLA DE L'HOSPITAL

Es un método que simplifica el cálculo de límites indeterminados aplicando el empleo de derivadas, para lo cual las funciones tienen que ser derivables.

Forma 0/0:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Si $a \to \infty$ conviene hacer la sustitución $x = \dfrac{1}{z} \Rightarrow z \to 0$

Forma $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(similar al caso anterior: } \tfrac{0}{0}\text{)}$$

Nota

Derivadas notables

$f_{(x)} = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$ (a cte)
$f_{(x)} = ex \Rightarrow f'(x) = e^x$ (e base neperiano)
$f_{(x)} = \text{senx} \Rightarrow f'(x) = \cos$
$f_{(x)} = \cos x \Rightarrow f'(x) = \text{senx}$
$f_{(x)} = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\text{senx}}$

Resolución:
Evaluamos, se obtiene $\frac{0}{0}$.

Aplicando L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{\text{senx}}}_{\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^x}{\cos x}}_{\frac{f'(x)}{g'(x)}} = \frac{e^0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

Resolución:
Al evaluar se obtiene $\frac{0}{0}$.

Se puede aplicar L'Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{\ln x}{2x - 2}}_{\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{2}}_{\frac{f'(x)}{g'(x)}} = \frac{1}{2}$$

Problemas resueltos

1 Halla:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$$

Resolución:

$$\frac{(x+2)(x^2 - 3x + 5)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$$

Luego:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$$

Por propiedad:

$$= \frac{\left[\lim\limits_{x \to -2} x\right]^2 - 3\left[\lim\limits_{x \to -2} x\right] + \lim\limits_{x \to -2} 5}{\lim\limits_{x \to -2} x + \lim\limits_{x \to -2} 1}$$

$$= \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 5}{-2 + 1} = -15$$

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} = -15$$

2 Halla:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 2x + 3}$$

Resolución:

$$S = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 2x + 3}$$

Como el grado del dividendo es igual al grado del divisor:

$$S = \frac{2}{3}$$

3 Calcula:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}}\right)^{\left(\frac{x^2 - x}{x^2 + x}\right)}$$

Resolución:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}}\right)^{\left(\frac{x^2 - x}{x^2 + x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 + 1)}\right\}^{\frac{x(x-1)}{x(x+1)}}$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \left\{\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}^3 + 1}\right\}\right)^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1}} = (-1)^{(-1)} = -1$$

4 Calcula:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{x} + 5x}{2x + 7\sqrt{x}}\right]$$

Resolución:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x} + 5x}{2x + 7\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para levantar la indeterminación dividimos entre x al numerador y al denominador:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{x} + 5x}{x}\right)}{\left(\frac{2x + 7\sqrt{x}}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + 5}{2 + 7\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{0 + 5}{2 + 7(0)} = \frac{5}{2}$$

5 Resuelve:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}6x}{x}$$

Resolución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}6x}{x} = \lim_{x \to 0} 6\frac{\text{sen}6x}{6x} = 6(1) = 6$$

6 Determina:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x}{3x^2}$$

Resolución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

Por identidades trigonométricas:

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{2}{3} \times (1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

7 Calcula:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x - 3}{x + 2}\right]^{x - 1}$$

Resolución :

Evaluamos; estamos en el caso $(1)^{\infty}$.

$\Rightarrow$ Buscamos formar $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x - 3}{x + 2}\right]^{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-5}{x + 2}\right)^{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-(x+2)}{5}}\right)^{\left(\frac{-5}{x+2}\cdot\frac{-(x+2)}{5}\right)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-(x+2)}{5}}\right)^{\frac{-(x+2)}{5}\left(\frac{-5(x-1)}{x+2}\right)}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to\infty} 5\frac{(x-1)}{x+2}} = e^{-5}$$

8 Resuelve los siguientes límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{|x+2|}{x+2}$
- $\lim\limits_{x\to 3^-}[\![x-2]\!]$

Resolución:

- $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{|x+2|}{x+2} \Rightarrow$ x toma valores mayores y próximos a – 2.
  $x+2>0$
  $\frac{(x+2)}{x+2}=1$
- $\lim\limits_{x\to 3^-}[\![x-2]\!] = \lim\limits_{x\to 3^-}([\![x]\!]-2)$
  $\Rightarrow$ x toma valores menores y próximos a 3.
  $2\le x<3 \;\Rightarrow\; [\![x]\!]=2$

Luego: $\lim\limits_{x\to 3^-}([\![x]\!]-2) = \lim\limits_{x\to 3^-}(2-2)=0$

9 Calcula:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

Resolución:

Sea: $x=z^{20}$

Como: $x\to 1 \;\Rightarrow\; z^{20}\to 1$

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^5-1} = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\; \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{4}{5}$$

10 Calcula el valor de a + b + c, si:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^5+x^4-10}{x^3-1}-ax^2+bx+c\right)=0$$

Resolución:

Operamos dentro del límite y factorizamos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a)x^5+(1+b)x^4+cx^3+ax^2-bx-10-c}{x^3-1}=0$$

Por propiedad, el grado del denominador debe ser mayor que el grado del numerador.

$\Rightarrow\; 2-a=0\;;\; 1+b=0 \;\wedge\; c=0$

$a=2\;;\quad b=-1$

$\therefore\; a+b+c=1$

11 Determina:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}\right)$$

Resolución:

Evaluando, presenta indeterminación:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}\cdot\left(\frac{\tan x+\operatorname{sen}x}{\tan x+\operatorname{sen}x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x-\operatorname{sen}^2x}{\tan x+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

Usamos identidades trigonométricas:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)}{\tan x+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^4x}{\cos^2x}}{\tan x+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^4\cdot\frac{1}{\cos^2x}\cdot\frac{1}{\frac{\tan x+\operatorname{sen}x}{x}}$$

Empleando límites trigonométricos:

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^4\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$$

$$= (1)\cdot\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+1}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\; \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$$

12 Calcula el valor aproximado de:

$$\frac{x^x-1}{\ln x}$$

Cuando x se aproxima a 1.

Resolución:

Sea: $F(x)=\frac{x^x-1}{\ln x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}F(x)=\frac{0}{0}$

Aplicando la regla de L' Hospital:

$$\lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^x-1)'}{(\ln x)'}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)}{\frac{1}{x}}$$

$$= (1)1\,.\,(\ln 1+1)$$

$$\therefore\; \lim_{x\to 1}F(x)=1$$

Nota

El problema histórico de hallar la tangente a una curva

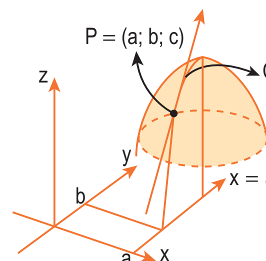


y los trabajos de Fermat; Newton y Leibtniz dieron origen a la definición de derivada.

INTRODUCCIÓN

La derivada es un poderoso instrumento del cálculo infinitesimal y expresa el ritmo de cambio instantáneo de cualquier función. Surge de la necesidad de saber la forma en que varía una cantidad respecto de otra, considerando los problemas de la tangente, aceleración, máximos y mínimos que involucran la noción de límites. Por la cual aparece una rama llamada cálculo. Cuya función es la de modelar y optimizar valores.

La derivada de una función P(x; y; z)
Representación:
P'(x; y; z): pendiente de cualquier curva.



DEFINICIÓN

Sea una función f(x), la derivada representa la razón de la variación de la función entre la variación de la variable. Estas variaciones se hacen cada vez más pequeñas, entonces:

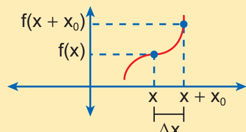
$$y' = f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

Hacemos $\triangle x = h \Rightarrow$ $$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (más usado)

Observación

Incremento de x : $\triangle x$

$\triangle x = x - x_0$





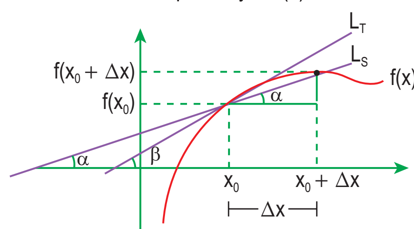
Notación

Si f es una función que depende de los valores de la variable independiente x, la derivada se denota por:

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = D_x f$$ Se lee: derivada de f con respecto a x.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Sea la curva cualquiera $y = f(x)$



Donde:
f(x): función de variable x
L_T: recta tangente
L_S: recta secante

Atención

Para determinar la derivada de una función en el punto x_0 solo se reemplaza x por x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0+\triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$



Observamos que cuando $\Delta x = x - x_0$ se hace pequeño (concepto de límite); $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ también se reduce y la recta L_S (recta secante) se aproxima a ser una recta tangente L_T, y α se aproxima a β.

$\Rightarrow \tan\alpha \longrightarrow \tan\beta$

$$\tan\beta = \frac{f(x_0+\triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \longrightarrow \tan\alpha$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0+\triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

Importante

La derivada de la función f(x) en el punto x_0 viene a ser la pendiente o tangente en ese punto (x_0).



Ejemplo:
Aplica la definición de la derivada para calcular f'(x) si $f(x) = \sqrt{x}$.

Resolución:
Sabemos que por definición: $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \quad \text{multiplicamos por} \quad \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x+\Delta x-(x)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

Evaluando el límite $\triangle x = 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

TEOREMAS

Conozcamos los principales teoremas que se utilizan en el marco de la derivación de ciertas expresiones. Para esto, sean f y g, funciones diferenciables en un intervalo y c una constante, entonces:

1. Si: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$	6. $[f(x) \,.\, g(x)]' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$
2. Si: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$	7. $[cf(x)]' = cf'(x)$
3. Si: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$	8. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
4. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$	
5. $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$	9. $\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = \dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

Demostración del teorema 2:
Si: $f(x) = x$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \quad \therefore f'(x) = 1$$

Demostración del teorema 4:

$$D_x[f(x)+g(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}$$
$$D_x[f(x)+g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

Ejemplos:

1. Si $f(x) = x^6 - 8x^5 + 3x^2 - 1$, halla f'(x).

Resolución:

$$\frac{d}{dx}[x^6 - 8x^5 + 3x^2 - 1] = (x^6)' - (8x^5)' + (3x^2)' - (1)'$$

$$f'(x) = 6x^5 - 8 \,.\, 5x^4 + 3 \,.\, 2x - 0 = 6x^5 - 40x^4 + 6x$$

2. Si $y = \dfrac{2x+3}{x^2+2}$, halla y'.

Resolución:
Aplicando la regla de la derivada de un cociente:

$$y' = \frac{(2x+3)'(x^2+2) - (2x+3)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$y' = \frac{2(x^2+2) - (2x+3)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2-6x+4}{(x^2+2)^2}$$

Observación

Si $x = x_0 + \triangle x$, hacemos: $\triangle x = h$

$$\Rightarrow \underbrace{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-f(x)}{h}}$$

Pendiente de la recta tangente en el punto x_0.
$x + h \in Domf(x)$



Nota

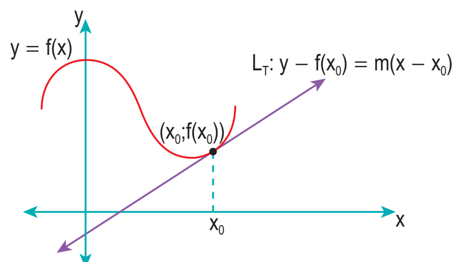
Para el cálculo de la derivada, se emplean todos los métodos estudiados en límites.



ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA

Sea $y = f(x)$ una curva cualquiera, sabemos por definición de la derivada que la pendiente en el punto x_0 de f(x) es la derivada en ese punto $f'(x_0)$. Y la ecuación de la recta tangente en el punto x_0 es:

$$L_T: \boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$



Siendo m la pendiente de L_T.
$m = f'(x)$: pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x_0.

Recuerda

La derivada de orden superior también se expresa así:

$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (segunda derivada de f(x))

$\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ (tercera derivada de f(x))

$D_x^2f((x))$ (segunda derivada de f(x))

$D_x^3f((x))$ (tercera derivada de f(x))



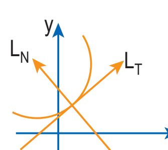
Ejemplos:

- Halla la ecuación de la tangente en $x_0 = 1$ de la función $y = 3x^3 - 2x$.

  Resolución:
  No es necesario graficar la función.
  Sabemos:
  $L_T = y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
  $\Rightarrow f(1) = 3(1)^3 - 2(1) = 1 \wedge f'(x) = 9x^2 - 2$
  $f'(1) = 9 - 2 = 7$

  Reemplazamos en L_T:
  L_T: $y - 1 = 7(x - 1)$
  L_T: $y - 7x + 6 = 0$

- Encuentra la pendiente de L_N (recta normal) de la curva $y = 2x^2 + 2$ en el punto $\frac{3}{2}$.



  Resolución:
  $m_{L_T} = y' = 4x$; para $x = 3/2$
  $\Rightarrow m_{L_T} = 6$
  Propiedad:
  $m_{L_T} . m_{L_N} = -1 \Rightarrow m_{L_N} = -1/6$
  La ecuación de L_N será:
  L_N: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$; $f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{2}$
  $\therefore L_N$: $2x + 12y - 81 = 0$

Derivada de orden superior

Sea $f(x) = 3x^7$ una función diferenciable.
$\Rightarrow f'(x) = 21x^6 \leftarrow 1.^a$ derivada
Función diferenciable
$f''(x) = 126x^5$ $2.^a$ derivada o derivada de f'
$f'''(x) = 630x^4$ $3.^a$ derivada o derivada de f''
⋮ ⋮

Notación:

$$f^{\overbrace{'''\cdots}^{\text{"n" veces}}}; D^n f; \frac{d^nf(x)}{dx^n}; \frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

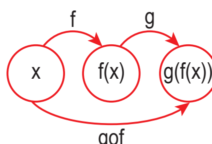
Atención

- $D_x^n(f(x) \pm g(x)) = D_x^n f(x) \pm D_x^n g(x)$
- $D_x^n x^m = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}; \text{si } 0 \le n \le m \\ m!; \text{si } n = m \\ 0; \text{si } n > m \end{cases}$



REGLA DE LA CADENA

Sean f y g funciones diferenciables tal que:



Entonces:

$$\boxed{g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)}$$

Forma práctica dada una función $(g(x))^n$:
Si $f(x) = (g(x))^n \Rightarrow f'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$
Ejemplo:
Halla $\left(\sqrt{3x^2 + 2}\right)'$

Resolución:
Sea $g(x) = 3x^2 + 2$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$
$f'(x) = \frac{1}{2}g(x)^{-\frac{1}{2}}g(x)'$

$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}.6x$

$\therefore f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 2}}$



TIPOS DE DERIVADAS

Derivada de las funciones trigonométricas

1.	Si $f(x) = \text{sen}x \Rightarrow f'(x) = \cos x;\ \forall x \in \mathbb{R}$
2.	Si $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}x;\ \forall x \in \mathbb{R}$
3.	Si $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x;\ \forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$
4.	Si $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x;\ \forall x \neq n\pi$
5.	Si $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \,.\, \tan x;\ \forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$
6.	Si $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \,.\, \cot x;\ \forall x \neq n\pi$

Atención

Derivadas usuales:
$(e^x)' = e^x$
$(e^{-x})' = -e^{-x}$
e: base de los logaritmos neperianos.



Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas

1.	$y = a^{f(x)} \Rightarrow \frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)}.f'(x)\ln a$
2.	$y = e^{f(x)} \Rightarrow \frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x);\ (e \approx 2{,}72)$
3.	$y = \log_b f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_b f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}\log_b e$
4.	$y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Nota

Derivada de las funciones trigonométricas inversas.

f(x)	f'(x)
arcsenx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccosx	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctanx	$\frac{1}{1+x^2}$

REGLA DE L'HOSPITAL

Al evaluar $\lim\limits_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}$; si adopta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Entonces:

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to a}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$$



Ejemplo:

Calcula: $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x}{\text{sen}x}$

Resolución:

Evaluamos $x = 0$: $\frac{0}{\text{sen}0} = \frac{0}{0}$ (forma indeterminada)

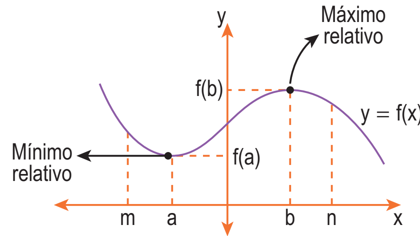
Aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0}\frac{x}{\text{sen}x} = \lim_{x \to 0}\frac{(x)'}{(\text{sen}x)'} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0}\frac{x}{\text{sen}x} = 1$$

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Máximos y mínimos

Consideremos la función $y = f(x)$ mostrada en la figura:



En el tramo [m; n]:

- Cuando $x = a$, la función f tiene un valor mínimo.
  El valor mínimo relativo es: f(a)
- Cuando $x = b$, la función f tiene un valor máximo
  El valor máximo relativo es: f(b)

Los valores de x para los que f(x) adopta un mínimo valor o máximo valor relativo se obtienen resolviendo la ecuación:

$$f'(x) = 0$$

(El valor de las pendientes en los puntos máximo o mínimo de una función es cero).

Criterio de la segunda derivada

Si al resolver $f'(x) = 0$ se obtiene $x = a$, entonces para comprobar que allí hay un mínimo o máximo relativo se aplica la siguiente regla:

Si: $f''(a) > 0 \Rightarrow$ en $x = a$ existe un mínimo relativo.

Si: $f''(a) < 0 \Rightarrow$ en $x = a$ existe un máximo relativo.

Ejemplo 1:

Calcula un máximo relativo de: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Resolución:

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$

$f''(x) = 6x - 6$

Si: $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0$

Si: $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$

En $x = 0$ hay un máximo relativo.

$\Rightarrow f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 1 = 1$

Ejemplo 2:

Encuentra el valor máximo o mínimo que posee la función $f(x) = x^2 + 4x + 8$

Resolución:

No es necesario dibujar.

Aplicando el criterio de la segunda derivada:

$f(x) = x^2 + 4x + 8$

$f'(x) = 2x + 4$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ la función posee un mínimo.

Para determinar el punto donde es mínimo.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0$

$x = -2$

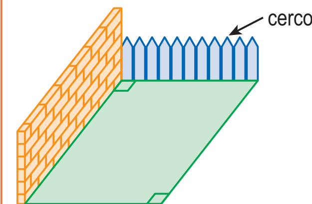
Para determinar la ordenada evaluamos $f(-2)$:

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 8 = 4$

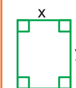
$\therefore$ La función posee un mínimo valor en $(-2; 4)$.

Ejemplo 3

Se desea maximizar el área a cercar con 80 m de cerco, determina las dimensiones de los lados.



Resolución:



El área es: xy ...(1)

Del dato $2x + y = 80$ ...(2)

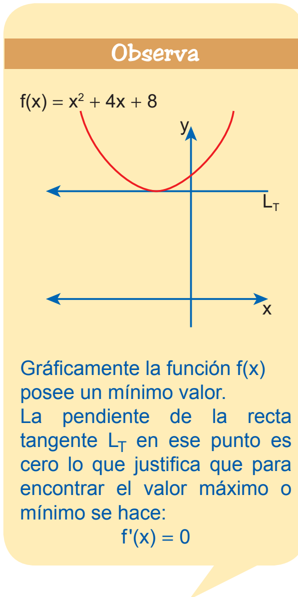
(2) en (1): área $= x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$

Maximizamos:

$80 - 4x = 0$

$\therefore x = 20$ m $\wedge$ $y = 40$ m

Observa



Gráficamente la función f(x) posee un mínimo valor.

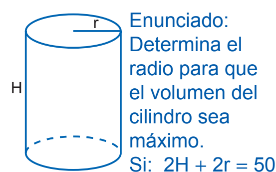
La pendiente de la recta tangente L_T en ese punto es cero lo que justifica que para encontrar el valor máximo o mínimo se hace:

$f'(x) = 0$

Nota

Para maximizar funciones donde no se muestra directamente la función f(x), hay que formar una ecuación que dependa de la variable que nos pida maximizar, en el enunciado

Ejemplo:



Enunciado: Determina el radio para que el volumen del cilindro sea máximo.

Si: $2H + 2r = 50$

$V(r) = \pi r^2.H$

Del dato:

$V(r) = \pi^2(25 - r)$

$\Rightarrow$ El volumen está en función del radio (incógnita)

Problemas resueltos

X

1 Por definición demuestra si $f(x) = x^n$
$f'(x) = nx^{n-1}$

Resolución

$$f'(x) = \text{lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \text{lím}\frac{(x+h)^n - x^n}{h};\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Por cocientes notables

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[(\cancel{x}+h)-\cancel{x}][(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+...+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+...+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]$$

$$= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+...+x^{n-1}}_{\text{n térmimnos}} = nx^{n-1}$$

2 Demuestra que $D_x\tan x = \sec^2 x$

Resolución:

$$\Rightarrow f(x) = \tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = D_x\frac{\text{sen}x}{\cos x}\ \text{(usamos derivada de una división)}$$

$$= \frac{D_x\text{sen}x(\cos x) - D_x\cos x(\text{sen}x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x.\cos x - (-\text{sen}x).\text{sen}x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\ \text{(identidad pitagorica)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

3 Dada la función: $f(x) = \tan 2x - \tan x$.
Halla: $f'(0)$

Resolución

$f(x) = \tan 2x - \tan x$
$f'(x) = 2\sec^2(2x) - \sec^2 x$
$f'(0) = 2\sec^2(0) - \sec^2(0) = \sec^2(0)$
$\therefore f'(0) = 1$

4 Si: $g(x) = x^2\text{sen}x$.
Calcula: $g'(\pi)$

Resolución:

Hallamos $g'(x) = D_xg$
$D_x(x^2\text{sen}x) = (x^2)D_x(\text{sen}x) + (\text{sen}x)D_x(x^2)$
$\underbrace{D_x(x^2\text{sen}x)} = (x^2)(\cos x) + (\text{sen}x)(2x)$

$g'(x) = x^2\cos x + 2x\text{sen}x$

Evaluamos, para $x = \pi$

$g'(\pi) = \pi^2 . \cos\pi + 2(\pi)(\text{sen}\pi)$
$g'(\pi) = \pi^2 . (-1) + 2\pi(0)$
$\therefore\ g'(\pi) = -\pi^2$

5 Dado el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$
Si $P(-1) = 6$, $P'(1) = 17$ y $P''(0) = 14$
Calcula: $a^2 + b^2 + c^2$

Resolución:

$P(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 6$
$a - b + c = 6 \quad ...(1)$
$P'(x) = 2ax + b$
$P'(1) = 2a(1) + b = 17$
$2a + b = 17 \quad ...(2)$
$P''(x) = 2a$
$P''(0) = 2a = 14 \Rightarrow a = 7$
Reemplazando $a = 7$ en (2): $2(7) + 6 = 17$
$\Rightarrow b = 3$
Reemplazando $a = 7$ y $b = 3$ en (1):
$7 - 3 + c = 6 \Rightarrow c = 2$
$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (7)^2 + (3)^2 + (2)^2 = 62$

6 $$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x^2-8x+1}{x^4-x^3+x-1}$$

Resolución:

Evaluamos en $x = 1$, tenemos:

$$\frac{2(1)^3+5(1)^2-8(1)+1}{(1)^4-(1)^3+(1)-1} = \frac{0}{0}\ \text{(caso indeterminado)}$$

Aplicamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x^2-8x+1}{x^4-x^3+x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6x^2+10x-8}{4x^3-3x^2+1} = \frac{8}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x^2-8x+1}{x^4-x^3+x-1} = 4$$

7 Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1}$$

Resolución:

Evaluando en $x = 0$, tenemos:

$$\frac{a^0-1}{a^0-1} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{ma^{mx}\ln a}{na^{nx}\ln a}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ma^{mx}}{na^{nx}} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1} = \frac{m}{n}$$

8 Calcula la derivada de:
$f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$

Resolución:

$$f(x) = \ln\underbrace{\left(e^x + (1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}}\right)}_{g(x)} = \ln g(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f' = \frac{e^x + \frac{1}{2}(1 + e^{2x})^{-\frac{1}{2}}(2e^{2x})}{e^x + (1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}}}$$

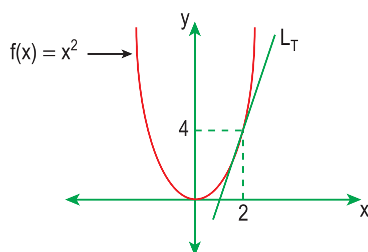
$$= \frac{e^x\left(1 + \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\right)}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^x\left(\frac{\sqrt{1 + e^x} + e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\right)}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$$

9 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 2.

Resolución:

Hallamos el punto de tangencia:
$(a; f(a))$
$\downarrow \quad \downarrow$
$(2; f(2)) = (2; 2^2) = (2; 4)$



La ecuación de la recta tangente (L_T) será:

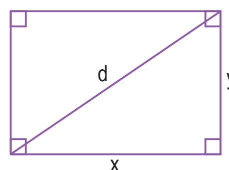
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$; donde $(x_0; y_0) = (2; 4)$
$\Rightarrow y - 4 = f'(2)(x - 2) \quad ...(1)$

Como:
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
$f'(2) = 2(2) \Rightarrow f'(2) = 4$

Reemplazando en (1):
$y - 4 = (4)(x - 2)$
$\therefore \quad L_T: y = 4x - 4$

10 Un rectángulo tiene 4 m de perímetro, halla el que tenga la diagonal mínima y da como respuesta su área.

Resolución:



$d^2 = x^2 + y^2$
$\Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad ...(1)$

Como el perímetro mide 4 m:
$2x + 2y = 4 \Rightarrow x + y = 2$
$y = 2 - x \qquad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):

$$d(x) = \left(x^2 + (2 - x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2}(2x + 2(-1)(2 - x))\left(x^2 + (2 - x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$d'(x) = \frac{(2x - 2)}{\sqrt{x^2 + (2 - x)^2}}$$

Maximizamos $\Rightarrow d'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + (2 - x)^2}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Reemplazando $x = 1$ en (2): $\Rightarrow y = 1$

$\therefore$ Área mínima $= xy = 1\ m^2$ (El área es mínima porque $d''(x) > 0$)

11 Determina la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\pi x}}$; en el punto cuya abscisa es 1/4.

Resolución:

Sabemos que la pendiente "m" es:
$m = f'(x_0)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\pi x)^{-1/2} . \cos\pi x . \pi$$

$$f'(x) = \frac{\pi\cos\pi x}{2\sqrt{\operatorname{sen}\pi x}}$$

Evaluamos en el punto $x_0 = \frac{1}{4}$

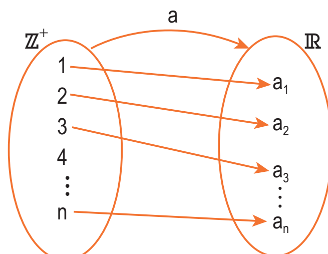
$$\text{pendiente} = f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi\cos\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}} = \frac{\pi\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \text{pendiente} = \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

SUCESIONES

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ es una función sobre los $\mathbb{Z}^+$ cuyos términos pertenecen al conjunto de los números reales.



Definida por extensión así:
$\{a_n\}$: $a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...; \forall n \geq 1$

Ejemplos:

- $\{a_n\}: 3; \frac{5}{2}; \frac{7}{3}; ... \Rightarrow a_n = \frac{n+2}{n}$ Donde: $a_1 = \frac{1+2}{1} = 3;\ a_2 = \frac{5}{2}; a_3 = \frac{7}{3}$ ...
- $\{b_n\}: 7; 8; 9; 10; ... \Rightarrow b_n = n + 5$ Donde: $b_1 = 1 + 5 = 7;\ b_2 = 8;\ b_3 = 9$ ...
- $c_n = n^2 + 1 \Rightarrow \{c_n\}: 2; 5; 10; ...$

Atención

Para que una sucesión esté definida, debe existir una ley de formación que condicione los términos.



FORMAS DE DEFINIR UNA SUCESIÓN

Por correspondencia

Se define a_n y se obtienen los términos de la sucesión
Evaluando: n = 1; 2; 3; ...
Ejemplo:

$$\{a_n\}: a_n = \frac{n^2}{n+2}$$

$\Rightarrow n = 1 : a_1 = \frac{1}{3}$; $n = 2 : a_2 = \frac{4}{4}$;

$n = 3 : a_3 = \frac{9}{5} \Rightarrow \{a_n\}$: 1/3; 1; 9/5; ...

Por recurrencia

Cuando se tiene como dato a_k y la relación de a_n con a_{n-1}.
Ejemplo:
Determina la sucesión si $a_2 = 7$ y $a_n = a_{n-1} - 3$

Del dato: $a_2 = 7 = a_1 - 3 \Rightarrow a_1 = 10$

$a_3 = \underbrace{a_2}_{7} - 3 \Rightarrow a_3 = 4$

$a_4 = \underbrace{a_3}_{4} - 3 \Rightarrow a_4 = 1$

$\Rightarrow \{a_n\}$: 10; 7; 4; 1; ...

TIPOS DE SUCESIONES

a) Sucesiones crecientes

$a_n \leq a_{n+1}$

$\{a_n\}$: 1; 1; 2; 3; 5; ...

b) Sucesiones decrecientes

$a_n \geq a_{n+1}$

$\{a_n\}$: 5; 4; 3; ...

c) Sucesiones estrictamente crecientes

$a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}$: 3; 9; 16; ...

d) Sucesiones estrictamente decrecientes

$a_n > a_{n+1}$

$\{a_n\}$: –1; –7; –17;...

e) Sucesiones monótonas

Una sucesión a_n es monótona si es creciente o decreciente, en otro caso será no monótona.
Ejemplos:

- $\{a_n\}: \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{7}{5}; ...$ Sucesión creciente $\Rightarrow$ es monótona
- $\{a_n\}$: 2; –2; 2; –2; ... Sucesión oscilante $\Rightarrow$ es no monótona
- $a_n = \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \{a_n\}: \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; ...$ Sucesión decreciente $\Rightarrow$ es monótona

Nota

Sucesiones conocidas:

Sucesión de Fibonacci
$a_1 = a_2 = 1$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2};\quad n \geq 3$
1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...

Sucesión Feinberg
$a_1 = 1$; $a_2 = 3$;...
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ $\forall n \geq 3$
1; 1; 2; 4; 7, 13; 24

Sucesión constante
Si: $\{a_n\}: a_n = 8$
$\Rightarrow \{a_n\}$: 8; 8; 8; ...

Observación

Si $k_1 \leq a_n \leq x_2$, la sucesión es acotada superior e inferiormente.



f) Sucesiones acotadas

Sucesión acotada superiormente, si existe un $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que: $a_n \leq k_1$

Ejemplo:

$\{a_n\}$: $\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; ...$

$a_n \leq \frac{3}{2}$

$\therefore a_n$ es acotada superiormente.

Sucesión acotada inferiormente, si, existe un $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que: $k_1 \leq a_n$

Ejemplo:

$\{a_n\} = a_n = \frac{n}{2} + 1$, sabemos que: $n \geq 1$

$$\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\frac{n}{2} + 1}_{a_n} \geq \underbrace{\frac{3}{2}}_{k_1}$$

$\therefore$ a_n es acotada inferiormente.

SUCESIÓN CONVERGENTE

Diremos que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente si: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$; tal límite es único y finito, entonces la sucesión **converge a L**, si no existe el límite la sucesión **diverge.**

Ejemplo:

A qué valor converge $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

Resolución:

$$a_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + ... + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Tomamos límites cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{1 - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}}_{0}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ $\therefore a_n$ converge a 1

Atención

- Para determinar la convergencia se tiene que tomar límite al infinito:

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

  Si el límite existe será convergente.

  Para ello se aplican las propiedades conocidas de límites y casos de indeterminación:

  $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; ...$

Criterio de la razón (D' alambert)

Es para determinar la convergencia de algunas sucesiones

Sea la sucesión $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$$

Si: $r < 1 \Rightarrow$ la sucesión converge a cero.
Si: $r > 1 \Rightarrow$ la sucesión converge.
Si: $r = 1 \Rightarrow$ el criterio no decide.

Ejemplo:

Determina si: $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; ...$ converge o diverge.

Resolución:

$a_n = \frac{n}{3^n} \Rightarrow$ por el criterio tomamos límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{1}{3} = r$$

$\therefore$ $r < 0$ la sucesión converge al valor cero.

Nota

- Toda sucesión monótona es acotada.



SERIES

Es la sumatoria de los términos de una sucesión, se denota con el símbolo sigma (Σ).

Elemento: $S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

Suma o series notables

I. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (suma de los n números naturales)

II. $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$ (suma de los primeros n pares)

III. $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$ (suma de los primeros n impares)

IV. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{a(n+1)(2n+1)}{6}$

V. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Propiedades de sumatorias

- $\sum_{x=1}^{n} c = nc$; c: constante
- $\sum_{x=1}^{n} ca_n = c\sum_{x=1}^{n} a_n$
- $\sum_{x=1}^{n} (a_n \pm b_n) = \sum_{x=1}^{n} a_n + \sum_{x=1}^{n} b_n$
- $\sum_{x=p}^{q} c = (q - p + 1)c$

Recuerda

En toda PA:
La suma de los términos equidistantes es constante.

7; 15; 23; ...; 71; 79; 87

94

94

94



PROGRESIONES

Progresión aritmética (PA)

Es una sucesión especial en la que dos términos consecutivos están diferenciados en una constante **r** llamada razón aritmética.

Forma de una progresión aritmetica: $\underset{+r}{a_1; a_2}; \underset{+r}{a_3}$; ...; a_n; ... ; donde: r: razón

$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$; donde a_n: término enésimo

Término de lugar n o término enésimo (a_n)

De la progresión:
$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + 2r$
↓ ↓

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$

a_1: primer término.
a_n: término de lugar n.
n: números de términos

Suma de términos de una PA

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n$$

También: $S_n = \left(\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right)n$

Interpolación de m medios aritméticos entre a_1 y a_n

: $a_1; \underbrace{\ldots}_{\text{m medios aritméticos}}; a_n$

Donde:

$$r = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

r: razón aritmética de la progresión

Atención

Si una progresión aritmética posee un número impar de términos:
a_1; a_2; a_3, ...; a_n; donde n es impar
⇒ Término central:

$$t_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Suma de los términos:

$$S_n = t_c \times n$$



Nota

Progresión de orden superior

Son progresiones cuya razón constante se presenta a partir de la segunda sucesión:

$a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; ... a_n$



Término a_n

$$a_n = a_1 + r_1 C_1^{n-1} + r C_2^{n-1}$$

Suma de los n términos S_n

$$S_n = a_1 C_1^n + r_1 C_2^n + r C_3^n$$

Recuerda

En una PG la razón "q" se determina dividiendo dos términos consecutivos cualesquiera.



Atención

Si una PG tiene n.° de términos impares

Término central

$$t_c = \sqrt{t_1 \times t_n}$$

El término central se determina multiplicando los extremos y luego sacando la raíz cuadrada.



Progresión geométrica (PG)

Es una sucesión cuyos términos consecutivos están multiplicados por una razón qi siendo $q \in \mathbb{R}$.

Forma de una progresión geométrica $\quad :: t_1; t_2; t_3; ... t_n$ (×q ×q)

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = ... = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$; donde:

q: razón geométrica
t_1: primer término
t_n: término de lugar n

Término de lugar n de una PG(t_n)

De la PG: $:: t_1; t_2; t_3; ... t_n$

$t_1 = t_1$

$t_2 = t_1 q^{2-1}$

$t_3 = t_1 q^{3-1}$

↓ ↓

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

Suma de términos de una PG

$$S_n = t_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Suma límite de una PG de infinitos términos

Sea la PG $:: t_1; t_1q; t_1q^2; ...$

$$S_L = \frac{t_1}{1 - q}$$; donde $q \in \langle 0; 1 \rangle$

Ejemplo:

$S = 16 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... \Rightarrow q = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$S = \dfrac{16}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{64}{3}$

Interpolación de m medios geométricos entre a_1 y a_n.

$: a_1; \underbrace{...}; a_n$
m medios geométricos

Donde n.° de términos es: m + 2

$\Rightarrow$ la razón: $$q = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Progresión armónica (PH)

$: \frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; \frac{1}{a_3}; ... \frac{1}{a_n}$, forman una PH si: $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ forman una progresión aritmética.

Ejemplos de aplicacion:

1. Halla el número de términos de la siguiente PA:

   18; 24; 30; 36; ...; 282

   Dato: $r = 6$; $t_1 = 18$; $t_n = 282$

   Aplicamos:

   $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \Rightarrow n = \frac{282 - 18}{6} + 1$

   $\therefore n = 45$

2. Calcula la suma de los 28 términos de la siguiente PA:

   36; 40; 44; ...

   Datos: $a_1 = 36$; $r = 4$; $n = 28$; $S_{28} = ?$

   Aplicamos:

   $S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right]n$

   $\Rightarrow S_{28} = \left[\frac{2(36) + (28-1)4}{2}\right]28$

   $\therefore S_{28} = 2520$

3. Calcula $\frac{t_{15}}{t_5 \times t_8}$ en la siguiente PG:

   1; 3; 9; ...

   Datos: $q = \frac{3}{1} = 3$; $t_1 = 1$

   Aplicamos: $t_n = t_1 q^{n-1}$

   Entonces: $t_5 = 1 \times 3^{5-1} = 3^4$

   $t_8 = 1 \times 3^{8-1} = 3^7$

   $t_{15} = 1 \times 3^{15-1} = 3^{14}$

   Piden: $\frac{3^{14}}{3^4 \times 3^7} = \frac{3^{14}}{3^{11}} = 3^3 = 27$

4. Calcula: $S = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{17}$

   Datos: $q = \frac{5^2}{5} = 5$; $t_1 = 5$; $S_{17} = ?$

   Aplicamos: $S_n = t_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \Rightarrow S_{17} = 5\left(\frac{5^{17} - 1}{5 - 1}\right)$

   $= \frac{5}{4}(5^{17} - 1)$

Problemas resueltos



1 Dada la sucesión:
$a_n: 1\ ; \frac{5}{3}; \frac{10}{4}; \frac{17}{5}; ...$
Determina a_{20}.

Resolución:

Podemos escribir: $a_1 = \frac{2}{2}$

$\Rightarrow a_n : \frac{2}{2}; \frac{5}{3}; \frac{10}{4}; \frac{17}{5}; ...$

El denominador es $n + 1$; y observamos que el numerador es $n^2 + 1$

$\Rightarrow a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$

$\therefore a_{20} = \frac{20^2+1}{21} = \frac{401}{21}$

2 Si: $a_1 = 7$ y $a_n = 2a_{n-1} + 3$.
Determina la suma de: $a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Resolución:

$a_1 = 7$
$a_2 = 2(a_1) + 3 = 17$
$a_3 = 2(a_2) + 3 = 37$
$a_4 = 2(a_3) + 3 = 77$
$a_5 = 2(a_4) + 3 = 157$

Piden: $\underbrace{17 + 37 + 77 + 157}_{S = 288}$

3 La sucesión $a_n = \frac{n+3}{n+2}$, ¿es acotada?

Resolución:

$\frac{n+3}{n+2} = \frac{n+2+1}{n+2} = 1 + \frac{1}{n+2}$

Sabemos por teoría:
$n \geq 1$
$n + 2 \geq 3$
$0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}$
$1 < \frac{1}{n+2} + 1 \leq \frac{4}{3}$

$\therefore$ Es acotada superior e inferiormente.

4 A qué valor converge la sucesión:
$\{a_n\} / a_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 10}{3n^3 - 2n + 5}$

Resolución:

Para determinar la convergencia, tomamos límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 10}{3n^3 - 2n + 5}$$

Dividimos el numerador y denominador entre n^3:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3 + 3n^2 + 10}{n^3}}{\frac{3n^3 - 2n + 5}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{10}{n^3}}{3 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}}$$

Recuerda:
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$$

$\therefore a_n$ converge a 1/3

5 Reduce:
$z \times \sqrt[3]{z} \times \sqrt[6]{z} \times \sqrt[12]{z} ...$

Resolución:

$z \times z^{1/3} \times z^{1/6} \times z^{1/12} ...$

$= z^{\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ...}_{\text{suma límite}}}$

$= z^{1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}}}$

$= z^{1 + \frac{2}{3}}$

$= z^{5/3}$

6 En una PA se cumple: $a_5 = 17 \wedge a_{10} = 32$
Determina la razón.

Resolución:

Usamos la fórmula del término enésimo:

$a_5 = a_1 + (5 - 1)r$

$a_{10} = a_1 + (10 - 1)r$

Del dato:

$\Rightarrow 17 = a_1 + 4r$ ... (I)

$32 = a_1 + 9r$ ... (II)

II – I: $15 = 5r$

$r = 3$

$\therefore$ La razón de la PA es 3.

7 Si $a + b$; $b + c$; $c + a$ es una progresión armónica y $b^2 + c^2 = 18$, halla a.

Resolución:

Los términos $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{b+c}$ y $\frac{1}{c+a}$ forman una PA, luego el término central es:

$$\frac{1}{b+c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a}\right)$$

$$\frac{2}{b+c} = \frac{c+a+a+b}{ac+a^2+bc+ab}$$

$$\frac{2}{b+c} = \frac{2a+b+c}{a^2+ac+bc+ab}$$

Simplificando:

$2a^2 = \underbrace{b^2 + c^2}_{18} \Rightarrow 2a^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 9$

$\therefore a = \pm\ 3$

8 Calcula la suma límite:

$S = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^6 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^8 + ...$

Resolución

$S = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^6 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^8 + ...$

Sea: $\frac{2}{3} = x$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow S = x^2 + 2x^4 + 3x^6 + 4x^8 + ... \\ \Rightarrow x^2.S = x^4 + 2x^6 + 3x^8 + 4x^{10} + ...\end{array}\right\} (-)$

$(1 - x^2)S = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ...$

Como $x < 1$; entonces:

$(1 - x^2)S = \frac{x^2}{1 - x^2}$

$S = \frac{x^2}{(1 - x^2)^2} \qquad ...(\alpha)$

Reemplazando $x = \frac{2}{3}$ en (α):

$S = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{\left(\frac{25}{81}\right)}$

$\therefore S = \frac{36}{25}$

9 Si se escogen 60 términos de cada sucesión:

3; 10; 17; ...

2; 5; 8; ...

¿Cuántos términos comunes se tendrá?

Resolución:

La primera es una: PA de razón 7.

La segunda es una PA de razón 3.

2; 5; 8; 11; 14; (17) → primer término en común.

Los siguientes serán: [r = MCM(7; 3) = 21]

17; 38; 59; ...

Como se escogen 60 términos, entonces el último término de cada sucesión es:

- $t_n = 3 + (60 - 1)7 = 416$
- $t_n = 2 + (60 - 1)3 = 179$

El total estará entre 17 y 179:

$\Rightarrow n = \frac{179 - 17}{21} + 1 = 8,...$

Como n es entero $\Rightarrow n = 8$

$\therefore$ Existen 8 términos en común.

10 Sea la siguiente sucesión: $\left\{\frac{7^n - 3^{n+1}}{3^n + 7^{n-1}}\right\}$

¿A qué valor converge?

Resolución:

Tomamos límite cuando $n \to \infty$:

Luego:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7^n - 3^{n+1}}{3^n + 7^{n-1}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{3^{n+1}}{7^n}}{\frac{3^n}{7^n} + \frac{7^{n-1}}{7^n}}$

$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 1 - 3\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n + \lim\limits_{n \to \infty}\frac{1}{7}}$

$= \frac{1 - 0}{0 + \frac{1}{7}} = 7$

$\therefore$ La sucesión converge a 7.

11 Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por: $a_n = \left(\frac{3 + 5n}{n} - 4\right)^{4n}$

Determina el valor de convergencia de a_n.

Resolución:

Tomamos el $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{3 + n}{n}\right)^{4n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \underbrace{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}}_{e}{}^{\cdot 12}$

$= e^{12}$

$\therefore a_n$ converge a e^{12}.

12 Si $x_n = \left(\frac{1}{n - 2}\right)^{\frac{2}{n}}$; indica el valor al cual converge.

Resolución:

Tomamos límite:

$\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1}{n - 2}\right)^{\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{n + 3}{n - 2}\right)^{\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1 - \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n}}\right)^{\frac{2}{n}} = 2^0 = 1$

$\therefore$ Converge a 1.